## Exercice 3 4 points

*Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
*Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.*

**1.** On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z
(E) : $z^2+2az+a^2+1=0$
où a désigne un nombre réel quelconque.

. Pour toute valeurs de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
. Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
. Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

**2.** soit $\theta$ un nombre réel del'intervalle $]0;\pi[$ et z le nombre complexe $z=1+e^{i\theta}$ .
Pour tout réel $\theta$ dans l'intervalle $]0;\pi[$

. Le nombre z est un réel positif.
. Le nombre z est égal à 1.
. Un argument de z est $\theta$ .
. Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$ .

**3.** Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par : $f(x)=e^{-x}\sin(x)$

. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4};+\infty\right[$.
. Soit $f'$ la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
. La fonction f est positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$
. Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x)=e^{-x}(\cos(x)-\sin(x))$ .
La fonction F est une primitive de la fonction f.

**4.** Soit X une variable aléatoire suivante laloi exponentielle de paramètre 0,02.
0,45 est une valeur approchée à $10^{-2}$ prés de :

. $P(X=30)$
. $P(X\leqslant 60)$
. $P(X\leqslant 30)$
. $P(30\leqslant X\leqslant 60)$

**CORRECTION**

1. **Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans ℂ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.**

*Justification non demandée*

$z^2+2az+a^2+1=0$

$\Delta=4a^2-4(a^2+1)=-4<0$

$-4=(2i)^2$

L'équation admet deux solutions non réelles conjuguées donc ayant le même module.

2. **Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$**

*Justification non demandée*

- $1^{\text{ère}}$ méthode (En donnant un contre exemple)

Pour la valeur $\theta=\frac{\pi}{2}$ on a $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ et $z=1+i$.

Les propositions 1 et 2 sont donc fausses.

$|z|=\sqrt{2}$ $\quad z=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\frac{\pi}{4}$ est un argument de z, donc la proposition 3 est fausse.

Une des quatr propositions est vraie donc la proposition est vraie.

- $2^{\text{ème}}$ méthode (En utilisant les formules de trigonométrie)

$z=1+e^{i\theta}=1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$

$\cos(\theta)=\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})=2\cos^2(\frac{\theta}{2})-1$

$1+\cos(\theta)=2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ et $\sin(\theta)=2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})$

$z=2\cos^2(\frac{\theta}{2})+2i\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})=2\cos(\frac{\theta}{2})(\cos(\frac{\theta}{2})+2i\sin(\frac{\theta}{2}))=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

$0<\theta<\pi$ donc $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ et $\cos(\frac{\theta}{2})>0$

donc un argument de z est $\frac{\theta}{2}$

- $3^{\text{ème}}$ méthode (propriétés des exponentielles)

$z=1+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\times e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\times e^{i\frac{\theta}{2}}=e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})$

$e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}=\cos(\frac{\theta}{2})-i\sin(\frac{\theta}{2})+\cos(\frac{\theta}{2})-i\sin(\frac{\theta}{2})=2\cos(\frac{\theta}{2})$

$z=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\cos(\frac{\theta}{2})>0$

donc un argument de z est $\frac{\theta}{2}$

3. **Soit f ' la fonction dérivée de f. On a** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

Justification non demandée

sin(x) change une infinité de fois de signe sur $\left]\frac{\pi}{4};+\infty\right[$ donc les propositions 1 et 3 sont fausses.

Il faut donc calculer la fonction f ou de F pour conclure

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ et $(\sin(x))'=\cos(x)$

donc $f'(x)=(-e^{-x})(\sin(x))+(e^{-x})(\cos(x))=e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x))$

or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

**4. P(X $\leq$ 30)=0,45 à $10^{-2}$ près.**

*Justification non demandée*

X soit la loi exponentielle de paramètre 0,02.
Pour tout nombre réels positifs A et B ( $A \leqslant B$ ).

$P(X \leqslant A) = \int_0^A (0{,}02\,e^{-0{,}02\,t})\,dt = 1 - e^{-0{,}02\,A}$

$P(A \leqslant X \leqslant B) = e^{-0{,}02\,A} - e^{-0{,}02\,B}$

$P(X = A) = 0$

En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(X \leqslant 30) = 0{,}45$ à $10^{-2}$ près.