Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pailler ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0=0,4$ et $b_0=0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.

2. Déterminer a_1 et b_1 .

3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

4. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0,97 & 0,07\\ 0,03 & 0,93\end{pmatrix}$. On pose $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$.

4.a. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=AX_n$.

4.b. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n=A^nX_0$

4.c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30} . En donner une interprétation concrète.
(Les coefficients seront arrondis au millième.)

Partie B

1. On pose $D=\begin{pmatrix}0,9 & 0\\ 0 & 0,9\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0,07\\ 0,03\end{pmatrix}$.

1.a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}+b_{n+1}=1$

1.b. Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=DX_n+B$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n=X_n-10B$

2.a. Montrer que pour entier naturel n, $Y_{n+1}=DY_n$

2.b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n=D^nY_0$
En déduire que pour tout entier n, $X_n=D^n(X_0-10B)+10B$.

2.c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

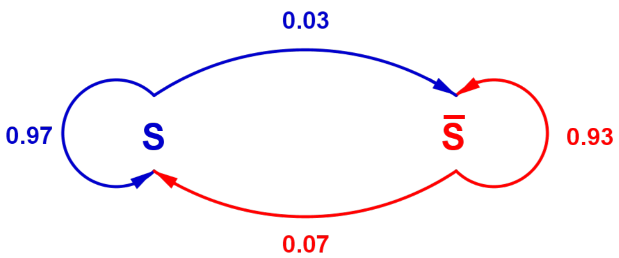
3. Selon cette étude, que peut -on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

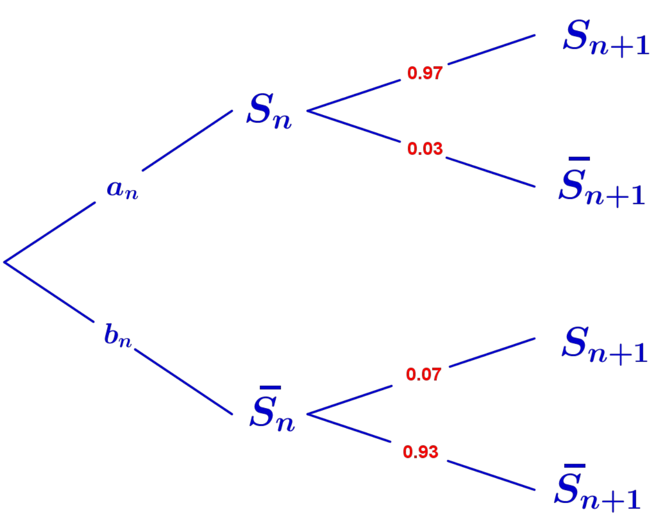
CORRECTION

Partie A

1.a. On se propose de construire un graphe probabiliste.
On choisit au hasard un ordinateur dans le parc informatique.
On considère 2 états : S et $\bar{S}$.
S : « l'ordinateur choisi est sain »
$\bar{S}$: « l'ordinateur choisi présente des failles de sécurité »
Chaque jour le technicien remet en état 7 % des ordinateurs défaillants donc le poids de l'arête $\bar{S}S$ est égal à **0,07** et 93 % des ordinateurs défaillants restent défaillants donc le poids de l'arête $\bar{S}\bar{S}$ est égal à **0,93.**
Chaque jour 3 % des ordinateurs sains deviennent défaillants donc le poids de l'arête $S\bar{S}$ est égal à **0,03** et 97 % des ordinateurs sains restent sains donc le poids de l'arête SS est égal à **0,97.**
On obtient le graphe probabiliste suivant :



1.b. On propose de construire un arbre pondéré.
Pour tout entier naturel n, on note :
S_n : « l'ordinateur choisi est sain au bout de n jours d'intervention »
S_{n+1} : « l'ordinteur choisi est sain au bout de (n+1) jours d'intervention »
$\bar{S}_n$: « l'ordinateur choisi présente des défaillances de sécurité au bout de n jours d'intervention »
$\bar{S}_{n+1}$: « l'ordinateur choisi présente des défaillances de sécurité au bout de (n+1) jours d'intervention ».
$P(S_n)=a_n$ $\quad$ $P(S_{n+1})=a_{n+1}$
$P(\bar{S}_n)=b_n$ $\quad$ $P(\bar{S}_{n+1})=b_{n+1}$
Chaque jour le technicien remet en état 7 % des orinateurs défaillants donc $P_{\bar{S}_n}(S_{n+1})=0{,}07$
et $P_{\bar{S}_n}(\bar{S}_{n+1})=1-0{,}07=0{,}93$
Chaque jour 3 % des ordinateurs sains présentent des défaillances donc $P_{S_n}(\bar{S}_{n+1})=0{,}03$
et $P_{S_n}(S_{n+1})=1-0{,}03=0{,}97$



2. Pour n=0
En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré :
$P(S_1)=P(S_0)\times P_{S_0}(S_1)+P(\bar{S}_0)\times P_{\bar{S}_0}(S_1)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$a_1 = a_0 \times 0,97 + b_0 \times 0,07 = 0,4 \times 0,97 + 0,6 \times 0,07 = 0,388 + 0,042 = 0,43$
$P(\bar{S}_1) = P(S_0) \times P_{S_0}(\bar{S}_1) + P(\bar{S}_0) \times P_{\bar{S}_0}(\bar{S}_1)$
$b_1 = a_0 \times 0,03 + b_0 \times 0,93 = 0,4 \times 0,03 + 0,8 \times 0,93 = 0,012 + 0,558 = 0,57$

3. En utilisant la formule des probabilités totales ou l'arbre pondéré
$P(S_{n+1}) = P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(\bar{S}_n) \times P_{\bar{S}_n}(S_{n+1})$
$a_{n+1} = a_n \times 0,97 + b_n \times 0,07 = 0,97\, a_n + 0,07\, b_n$
$P(\bar{S}_{n+1}) = P(S_n) \times P_{S_n}(\bar{S}_{n+1}) + P(\bar{S}_n) \times P_{\bar{S}_n}(\bar{S}_{n+1})$
$b_{n+1} = a_n \times 0,03 + b_n \times 0,93 = 0,03\, a_n + 0,93\, b_n$

4. $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

(Dans cet exercice on utilise les matrices colonnes).

4.a. Pour tout entier naturel n

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97\, a_n + 0,07\, b_n \\ 0,03\, a_n + 0,93\, b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

donc $X_{n+1} = AX_n$

4.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$

Initialisation

Pour n=0, on convient que $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $A^0 X_0 = X_0$.

La propriété est vérifiée pour n=0.

Héréditité

Pour démontrer que la propriété est héréditare pour tout entier naturel n, on suppose que $X_n = A^n X_0$ et on doit démontrer que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

Or $X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = (AA^n) X_0 = X^{n+1} X_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet de conclure que pour tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0$

5.c. En utilisant la calculatrice, on obtient : $A^{30} = \begin{pmatrix} 0,713 & 0,67 \\ 0,287 & 0,33 \end{pmatrix}$ et $X_{30} = A^{30} X_0 = \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$

Au bout de 30 jours, il y aura dans le parc informatique 68,7 % d'ordinateurs sains.

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$

1.a. Pour tout entier naturel n

$a_{n+1} = P(S_{n+1})$ et $b_{n+1} = P(\bar{S}_{n+1}) = 1 - a_{n+1}$

donc $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$

1.b. Pour tout entier naturel n

$$DX_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\, a_n + 0,07 \\ 0,9\, b_n + 0,03 \end{pmatrix}$$

Or $a_{n+1} = 0,97\, a_n + 0,07\, b_n$ et $b_n = 1 - a_n$

$a_{n+1} = 0,97\, a_n + 0,07(1 - a_n) = 0,97\, a_n + 0,07 - 0,007\, a_n = 0,9\, a_n + 0,07$

$b_{n+1} = 0,03\, a_n + 0,93\, b_n$ et $a_n = 1 - b_n$

$b_{n+1} = 0,03(1 - b_n) + 0,93\, b_n = 0,03 - 0,03\, b_n + 0,93\, b_n = 0,9\, b_n + 0,03$

Conclusion

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$$DX_n+B=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=X_{n+1}$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $Y_n=X_n-10\,B$

2.a. Pour tout entier naturel n

$$Y_n=X_n-10\,B=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}-10\begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n-0{,}7 \\ b_n-0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$Y_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1}-0{,}7 \\ b_{n+1}-0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9\,a_n+0{,}07-0{,}7 \\ 0{,}9\,b_n+0{,}03-0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9\,a_n-0{,}63 \\ 0{,}9\,b_n-0{,}27 \end{pmatrix}$$

$$DY_n=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n-0{,}7 \\ b_n-0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9\,a_n-0{,}9\times 0{,}7 \\ 0{,}9\,b_n-0{,}9\times 0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9\,a_n-0{,}63 \\ 0{,}9\,b_n-027 \end{pmatrix}=Y_{n+1}$$

<u>Conclusion</u>

$Y_{n+1}=D\,Y_n$

2.b. On admet que pour tot entier naturel n, $Y_n=D^n\,Y_0$

Or $Y_n=X_n-10\,B$ donc $X_n=Y_n+10\,B$ et $Y_0=X_0-10\,B$

On obtient $Y_n=D^n(X_0-10\,B)+10\,B$

2.c. Pour tout entier naturel n $D^n=\begin{pmatrix} 0{,}9^n & 0 \\ 0 & 0{,}9^n \end{pmatrix}$ (on peut facilement vérifier de résultat par récurrence

$$X_0-10\,B=\begin{pmatrix} a_0-0{,}7 \\ b_0-0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}4-0{,}7 \\ 0{,}6-0{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1}=D^{n+1}(X_0-10\,B)+10\,B$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}9^{n+1} & 0 \\ 0{,}9^{n+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{n+1}=-0{,}3\times 0{,}9^{n+1}+0{,}7 \\ b_{n+1}=0{,}3\times 0{,}9^{n+1}+0{,}3 \end{cases}$$

3. $0<0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1}=0{,}3$

Pour n grand (à long terme) la proportion d'ordinateurs d éfaillants sera voisine de 30 %.

Copyright © meilleurenmaths.com. Tous droits réservés