Exercice 1 *6 points*

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

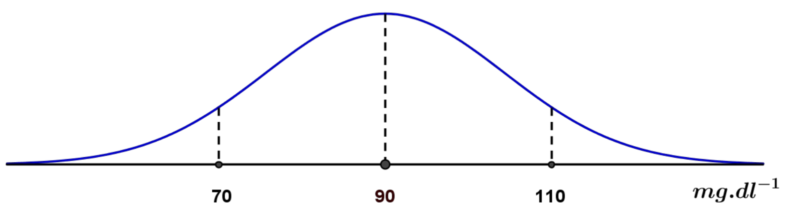
On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliard de personnes âgées de 20 à79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2016, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % dela population mondiale âgées de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgées de 20 à 79 ans vivant en rurale est atteinte du diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 70 ans.
On note :
R l'événement : « la personne choisie habite en zone rurale » ;
D l'événement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2.a. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
2.b. La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité quelle habite en zone rurale ?

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie, si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 $mg.dl^{-1}$. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre $70\,mg.dl^{-1}$ et $110\,mg.dl^{-1}$. Les personnes ayant un taux de glycémie comprise entre 60 et 70 $mg.dl^{-1}$ ne fait pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit, au hasard, un adulte dans cette population.
Une étude a permis d'établir que la probabilité en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près.
Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.
On modélise la glycémie à jeun, exprimé en $mg.dl^{-1}$, d'un adulte d'une population donnée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie est une glycémie à jeun « normale » ?

2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.

3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que cette personne soit en hyperglycémie.

Partie B

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgées de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10000 personnes.
Dans l'échantillon étudié 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

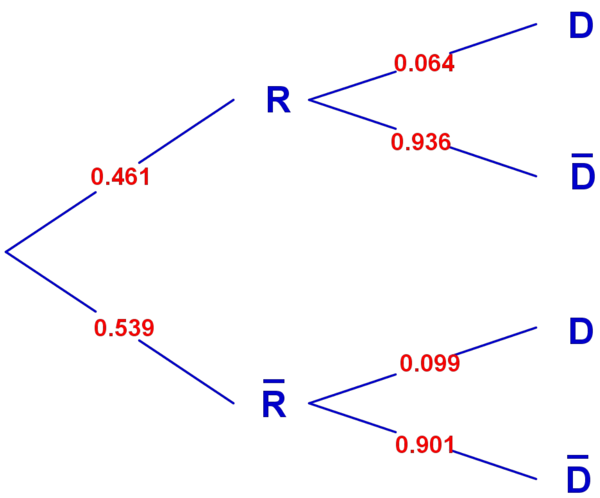
1. A l'aide d'un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgées de 20 à 79 ans.

2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut un intervalle de confiance inférieure ou égale à 0,01 ?

CORRECTION

Partie 1

1. $\bar{R}$ est l'événement « la personne choisie habite en zone urbaine »
$\bar{D}$ est l'événement « la personne choisie n'est pas atteinte de diabète »
« 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine »
donc $P(R)=0{,}461$ et $P(\bar{R})=0{,}539$
« 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte du diabète »
donc $P_{\bar{R}}(D)=0{,}099$ et $P_{\bar{R}}(\bar{D})=1-P_{\bar{R}}(D)=1-0{,}099=0{,}901$
« 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte du diabète »
donc $P_R(D)=0{,}064$ et $P_R(\bar{D})=1-P_R(D)=1-0{,}064=0{,}936$
On obtient pour arbre de probabilité.



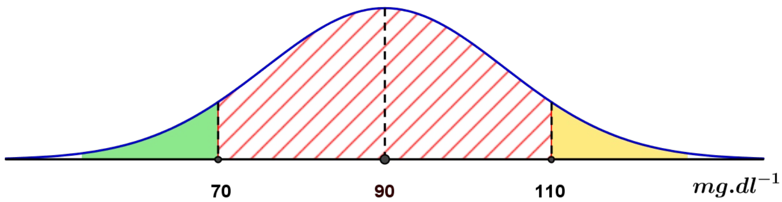
2.a. En utilisant l'arbre de probabimité ou la formule des probabilités totales.
$P(D)=P(R\cap D)+P(\bar{R}\cap D)$
$P(R\cap D)=P(R)\times P_R(D)=0{,}461\times 1{,}064=0{,}029504$
$P(\bar{R}\cap D)=P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(D)=0{,}599\times 0{,}099=0{,}053361$
$P(D)=0{,}029504+0{,}053361=0{,}082865$ = **0,083** à 10^{-3} près

2.b. On nous demande de calculer $P_D(R)$
$P_D(R)=\frac{P(R\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}029504}{0{,}082865}$ = **0,356** à 10^{-3} près

Partie 2

1. Un adulte est en hyperglycémie si le taux de glycémie à jeun est supérieur à 110.
La probabilité qu'un adulte soit en hyperglycémie est : 0,052
donc $P(110\leqslant X)=0{,}052$
X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
Par lecture graphique on obtient $\mu=90$.
$P(110\leqslant X)$ est l'aire (en U.A.) dela partie de pllan colorée en jaune sur la figure suivante.
$110=90+20$
X suit une loi normale donc $P(90+20\leqslant X)=P(X\leqslant 90-20)$
$P(X\leqslant 70)$ est l'aire (en U.A.) de la partie de plan colorée en vert sur la figure suivante.
$P(X\leqslant 70)=0{,}052$
On a $P(70\leqslant X\leqslant 110)=1-P(X\leqslant 110)-P(x\leqslant 70)=1-0{,}052-0{,}052$ = **0,896**
$P(70\leqslant X\leqslant 110)$ est l'aire (en U.A.) dela partie de plan hachurée en rouge sur la figure suivante.
Laprobabilité pour que la personne choisie est une glycémie à jeun « normale » est :

$P(70 \leqslant X \leqslant 110) = \mathbf{0{,}896.}$



2. $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite cenrée

$P(110 \leqslant X) = 0{,}052$ donc $P\left(\dfrac{20}{\sigma} \leqslant Y\right) = 0{,}052$.

On détermine avec la calculette a tel que $P(a \leqslant Y) = 0{,}052$.

On obtient $a = 1{,}6258$

$a = \dfrac{20}{\sigma}$ donc $\sigma = \dfrac{20}{a} = \dfrac{20}{1{,}6258} = \mathbf{12{,}3}$ à 10^{-1} près

3. $\mu = 90$ **et** $\sigma = 12$

En utilisant la calculatrice

$P(110 \leqslant X) = 0{,}0478 = \mathbf{0{,}048}$ à 10^{-3} près.

Partie 3

1. La proportion des personnes diagnostiquées diabétiques dans l'échantillon étudié est : $\dfrac{716}{10000} = 0{,}0716$

Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$\left[0{,}0716 - \frac{1}{\sqrt{10000}} ; 0{,}076 + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right] = [0{,}0716 - 0{,}01 ; 0{,}0716 + 0{,}01] = [0{,}0616 ; 0{,}0816]$$

Au niveau de confiance de 95 % on peut affirmer qu'il y a entre 6,16 % et 8,16 % de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française.

2. **S**i n est la taille de l'échantillon alors $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ est l'amplitude d'un intervalle de confiance.

On veut $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}01$

$\dfrac{2}{0{,}01} \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 200 \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 40000 \leqslant n$

Conclusion

La taille de l'échantillon donc être supérieure ou égale à 40000 pour l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure ou égale à 0,01.