Exercice 4 — 5 points

Un hélicoptère est en vol stationnaire au dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $v_1(t)=5\times\dfrac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1}$.

1. Déterminer le sens de variation de v_1.

2. On suppose dans cette question, que le parachute fonctionne correctement.
On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en ms^{-1} est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.
On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas $6\,ms^{-1}$.
Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ?
Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en ms^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager est donnée par : $v_2(t)=32,7(1-e^{-0,3t})$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en ms^{-1} atteinte par le colis au bout de 10 secondes ?
Arrondir à $0,1\,ms^{-1}$.

2. Résoudre l'équation $v_2(t)=30\,ms^{-1}$.
Donner une interprétation concrète de la solution de cette éaquation dans le cadre de cet exercice.

3. On sait que la chute du colis dure 20secondes.
On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(T)=\displaystyle\int_0^T v_2(t)\,dt$.

3.a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle [0;20], $d(T)=109(e^{-0,3T}+0,3T-1)$

3.b. Déterminer une valeur approchée à 1m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

CORRECTION

Partie 1

1. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $(e^{0,3t})'=0,3e^{0,3t}$
v_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$
$v_1'(t)=5\times\frac{(e^{0,3t}+1)\times(0,3e^{0,3t})-(0,3e^{0,3t})\times(e^{0,3t}-1)}{(e^{0,3t}+1)^2}=5\times\frac{0,6e^{0,3t}}{(e^{0,3t}+1)^2}$
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ $v_1'(t)>0$ donc v_1 est strivtement croissante sur $[0:+\infty[$.

2. Le colis arrive en bon état au sol si et seulement si $v_1(t)\leqslant 6$.
$v_1(t)\leqslant 6 \Leftrightarrow 5\times\frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1}\leqslant 6 \Leftrightarrow 5\times e^{0,3t}-5\leqslant 6\times e^{0,3t}+6 \Leftrightarrow 0\leqslant e^{0,3t}+11$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est $[0;+\infty[$
Conclusion
Le colis ne risque pas d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement.

Partie 2

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0:+\infty[$: $v_2(t)=32,7(1-e^{-0,3t})$
1. La vitesse au bout de 10secondes est égale à :
$v_2(10)=32,7(1-e^{-3})=31,1$ à 10^{-1} près

2. $v_2(t)=30 \Leftrightarrow 32,7-32,7e^{-0,3t}=30 \Leftrightarrow 2,7=32,7e^{+0,3t} \Leftrightarrow \frac{2,7}{32,7}=e^{-0,3t} \Leftrightarrow \ln(e^{-0,3t})=\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)$
$\Leftrightarrow -0,3t=\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right) \Leftrightarrow t=-\frac{1}{0,3}\times\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)=\mathbf{8,3}$ à 10^{-1} près
Au bout de 8,3s, la vitesse du colis atteint 30 ms^{-1}.

3.a. Rappel
Soit la fonction h est la définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t)=e^{at}$ a nombre réel non nul donné alors la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(t)=\frac{1}{a}e^{at}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
La fonction V_2 définie sur $[0;+\infty[$ par $V_2(t)=32,7t+\frac{32,7}{0,3}e^{-0,3t}=32,7t+109e^{-0,3t}$ est une primitive de v_2 sur $[0;+\infty[$.
$d(T)=\int_0^T v_2(t)\,dt = V_2(T)-V_2(0)=32,7T+109e^{-0,6T}-109=109(e^{-0,3T}+0,3T-1)$

3.b. Pour T = 20
$d(20)=109(e^{-6}+6-1)=545$ à une unité près.
La distance parcourue par le colis au bout de 20 secondes est 545 m.

4. Remarque
d est la primitive de v_2 sur $[0;+\infty[$ telle que d(0) = 0.
Donc $d'(T)=v_2(T)>0$ et d est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
d(T) = 700
En utilisant la calcula trice on obtient :
d(25) = 708,6 d(24) = 675,9
$d(24,7)=698,8$ $d(24,8)=702$
On obtient pour encadrement de T à 0,1s : $24,7<T<24,8$.