Exercice 1 5 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\,e^{-x}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

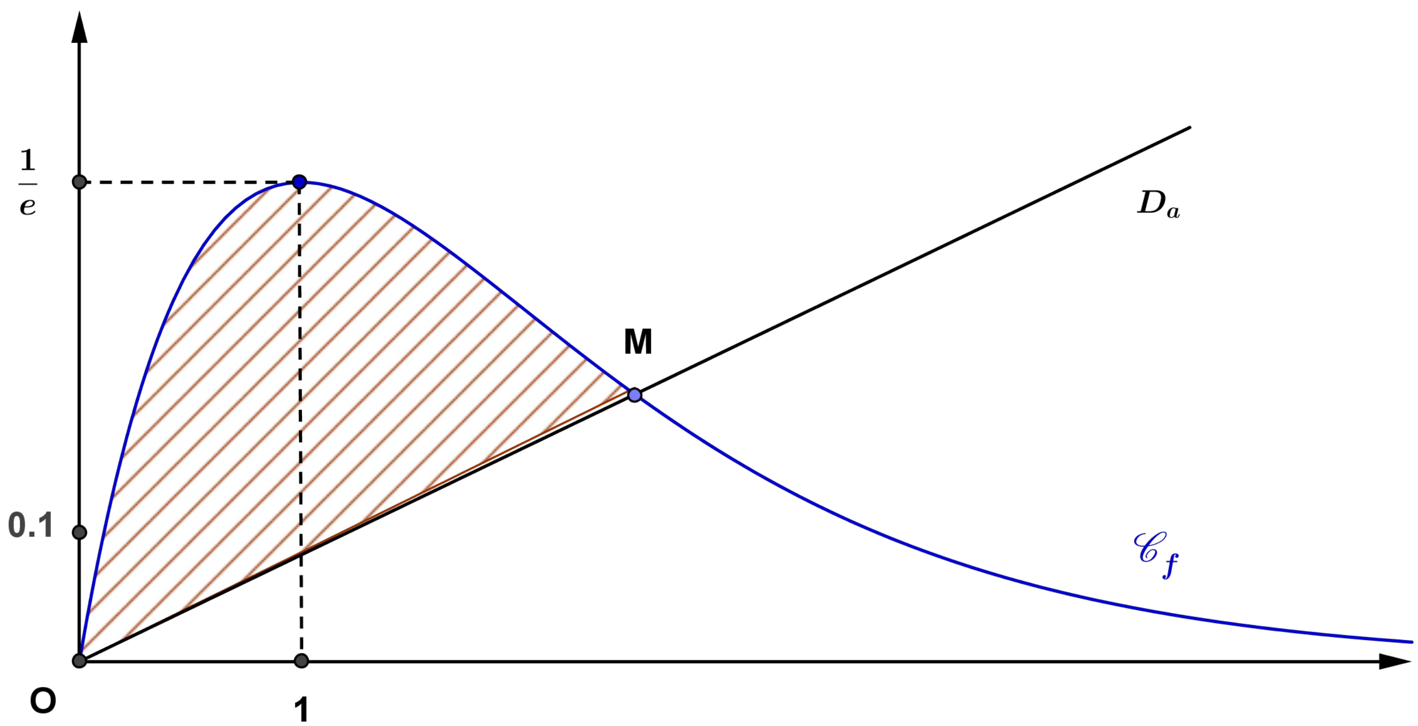
1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0	1	$+\infty$
f(x)	0 ↗	$\frac{1}{e}$	↘ 0

2. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=(-x-1)e^{-x}$.
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0<a<1$. On considère la droite D_a d'équation $y=ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathscr{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M.
On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est à dire domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$, au dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x=0$ et $x=x_M$.
Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur a telle que $\mathscr{H}(a)=0,5$ puis d'étudier un algorithme.



1. Prouver que la droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.
On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln(a)$ et que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0;-\ln(a)[$.

2. Montrer que $\mathscr{H}(a) = a\ln(a) - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 - a$.

3. Soit la fonction $\mathscr{H}$ définie sur $]0;1]$ par $\mathscr{H}(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x(\ln(x))^2 + 1 - x$.

On admet que $\mathscr{H}$ est dérivable sur $]0;1]$ et que son tableau de variations correspond à celui proposé ci-dessous.

x	0		$+\infty$
$\mathscr{H}(x)$	‖ 1	$\searrow$	0

Justifier qu'il existe un unique nombre réel $a \in]0;1]$ tel que $\mathscr{H}(a) = 0,5$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES : A,B et C sont des nombres
p est un entier naturel
INITIALISATION : Demander la valeur de p
A prend la valeur 0
B prend la valeur 1
TRAITEMENT : Tant que $B - A > 10^{-p}$
    C prend la valeur $\frac{(A+B)}{2}$
    Si $\mathscr{H}(C) > 0,5$
        Alors A prend la valeur de C
        Sinon B prend la valeur de C
    Fin de la boucle Si
Fin de la boucle Tant que
SORTIE : Afficher A et B

Que représentent les valeurs A et B affichés en sortie de cet algorithme ?

5. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de a.

CORRECTION

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(x)=x\,e^{-x}$

Partie A

1. f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$(e^u)'=u'e^u$ $(e^{-x})'=-1\times e^{-x}=-e^{-x}$

On dérive un produit :

$f'(x)=1\times e^{-x}+x\times(e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (1-x).

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

$1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

f est strictement croissante sur [0;1] et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est $f(1)=1\times e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

$f(0)=0\times e^0=0$

$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (résultat de cours) donc la limite de l'inverse est nulle $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

Conséquence : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

On obtient le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $F(x)=(-x-1)e^{-x}$.

F est une primitive de f sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $F'(x)=f(x)$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$

$F'(x)=-1\times e^{-x}+(-x-1)\times(-e^{-x})=(-1+x+1)e^{-x}=x\,e^{-x}=f(x)$

Partie B

$0<a<1$ D_a : $y=a\,x$

M est le point d'intersection (distinct de l'origine) de la droite D_a et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

$\mathscr{H}$(a) est l'aire exprimée, en unités d'aire, du domaine plan hachuré sur le graphique

1. On résout le système pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ et $0<a<1$.

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=a\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x\,e^{-x} \\ y=a\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\,x=x\,e^{-x}\ (1) \\ y=a\,x\ (2) \end{cases}$$

(1) $x(a-e^{-x})=0$ on obtient $x=0$ ou $a-e^{-x}=0 \Leftrightarrow a=e^{-x} \Leftrightarrow x=-\ln(a)$ (car $a>0$).

Si $x=0$ alors $y=0$.

Si $x=-\ln(a)$ alors $y=-a\ln(a)$;

Remarque : $\ln(a)\neq 0$ car $a<1$.
<u>Conclusion</u>
D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont un unique point d'intersection M, distinct de l'origine, de coordonnées $x_M=-\ln(a)$ et $y_M=-a\ln(a)$.
On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0;-\ln(a)]$.

2. Pour toute valeur de a de l'intervalle $]0;1[$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;-\ln(a)]$.
$f(x)=x\,e^{¿x}$ et $g(x)=a\,x$.
La courbe représentative de f est au dessus de celle de g et les fonctions f et g sont continues sur $[0;-\ln(a)]$ donc l'aire, en unités d'aire, du domaine plan hachuré est : $\mathscr{H}(a)=\int_0^{-\ln(a)}(f(x)-g(x))\,dx$.

$F(x)=(-x-1)e^{-x}$ F est une primitive de f sur $[0;-\ln(a)]$.

$G(x)=a\dfrac{x^2}{2}$ G est une primitive de g sur $[0;-\ln(a)]$.

$$\mathscr{H}(a)=F(-\ln(a))-G(a)-(F(0)-G(0))=(\ln(a)-1)e^{\ln(a)}-\frac{a(\ln(a))^2}{2}-(-1-0)$$

$$\mathscr{H}(a)=(\ln(a)-1)\times a-\frac{1}{2}a(\ln(a))^2+1=a\ln(a)-\frac{1}{2}a(\ln(a))^2+1-a$$

3. Le tableau de variations de $\mathscr{H}$ nous permet d'affirmer que $\mathscr{H}$ est continue et strictement décroissante sur]0;1] et à valeurs dans l'intervalle [0;1[.
0,5 appartient à l'intervalle [0;1[, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que 0,5 admet un ynique antécédent a appartenant à]0;1[($a\neq 1$ car $\mathscr{H}(1)=0$).
<u>Conclusion</u>
L'équation $\mathscr{H}(a)=0{,}5$ admet une unique solution a appartenant à]0;1[.

4. L'algorithme permet de déterminer un encadrement de l'unique valeur de a telle que $\mathscr{H}(a)=0{,}5$ à 10^{-p} près.
On obtient $A\leqslant a\leqslant B$ et $B-A\leqslant 10^{-p}$.

5. On détermine A et B en utilisant l'algorithme pour $p=2$.
On donne les résultats obtenus sous la forme d'un tableau.

	A	B	B-A	C	$\mathscr{H}(C)$
1	0	1	1>0.01	0.5	0.033<0.5
2	0	0.5	0.5>0.01	0.25	0.163<0.5
3	0	0.25	0.25>0.01	0.125	0.345<0.5
4	0	0.125	0.125>0.01	0.0625	0.524>0.5
5	0.0625	0.125	0.0625>0.01	0.09375	0.422<0.5
6	0.0625	0.09375	0.03125>0.01	0.078125	0.469<0.5
7	0.0625	0.078125	0.015625>0.01	0.0703125	0.495<0.5
8	0.0625	0.0703125	0.0078125<0.01		

Les résultats de $\mathscr{H}(C)$ sont arrondis à 10^{-3} près.
<u>Remarque</u>
$\mathscr{H}(0{,}069)=0{,}4999$ à 10^{-4} près.