Exercice 2 3 points

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda>0$.
On sait qu'un tel appareil à une durée moyenne de quatre ans.
La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est d'environ 0,39 à 0,01 près.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$
L'équation $z^3-3z^2+3z=0$ **admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.**

CORRECTION

1. AFFIRMATION 1

La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est d'environ 0,39 à 0,01 près.

AFFIRMATION FAUSSE

Justifications

T suit la loi exponentielle de paramètre λ , la fonction de densité de probabilité de T est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

La durée de vie moyenne d'un appareil est égale à l'espérance mathématique de T or $E(T)=\frac{1}{\lambda}$.

$E(T)=4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}=4 \Leftrightarrow \lambda=0,25$ donc $f(t)=0,25\,e^{-0,25t}$.

La loi exponentielle est une loi de durée de vie sans veillissement donc $P_{(3\leqslant X)}(3+2\leqslant X)=P(2\leqslant X)$.

$P(2\leqslant X)=1-P(0\leqslant X<2)$

$P(0\leqslant X<2)=\int_0^2 f(t)\,dt=-e^{-0,25\times 2}+1=1-e^{-0,5}$

car la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t)=-e^{-0,25t}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$

$P(2\leqslant X)=1-(-e^{-0,5}+1)=e^{-0,5}$

En utilisant la calculatrice, on obtient $P(2\leqslant X)=0,61$ à 0,01 près.

Donc **l'affirmation est fausse**

2. AFFIRMATION 2

L'équation $z^3-3z^2+3z=0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.

AFFIRMATION VRAIE

Justification

$z^3-3z^2+3z=0 \Leftrightarrow z(z^2-3z+3)=0 \Leftrightarrow (\ z=0$ ou $z^2-3z+3=0\ )$

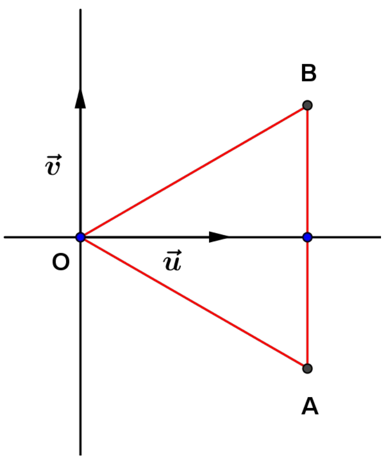
$z^2-3z+3=0$

$\Delta=9-4\times 3=-3=(i\sqrt{3})^2$

L'équations admet deux solutions complexes conjuguées

$z'=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et $z''=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

On obtient les trois points $O(0)$; $A\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$ du plan complexe.



$\overrightarrow{OA}\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$ $OA^2=\frac{9+3}{4}=3$

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ $OB^2=\frac{9+3}{4}=3$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{2i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}(i\sqrt{3})$ $AB^2=3$

<u>Conclusion</u>

$OA=OB=AB=\sqrt{3}$ donc le triangle OAB est équilatéral.

Donc **l'affirmation est vraie**