Exercice 3 4 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes A, B, C, et D sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.
Peut-on rejeter au seuil de 95 % l'affirmation suivante : « il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué à l'examen » ?

Partie B

Le Thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maitriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.
Lors de l'examen, on a constaté qu'il y a un exercice sur le thème A :

- 30 % des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\frac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20 % des étudiants participent au stage.
Lors des résultats de l'examen, un étudiant s'exclame : « je n'ai pas du tout traité le thème A ».
Quelle est la probabilité que cet étudiant ait suivi le stage ? On arrondira le résultat à 0,001 près. ?

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu=225$ et d'écart-type σ où $\sigma>0$.
La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de 0,98.
Déterminer une valeur approchée de σ à 0,1 près.
On pourra, par exemple, introduire la variable aléatoire $Z=\frac{T-225}{\sigma}$.

CORRECTION

Partie A

La fréquence de sujets portant sur le thème A parmi les 34 sujets de l'examen déjà posés est : $f=\frac{22}{34}=\frac{11}{17}$

f = 0,647 à 0,001 près.
On veut tester l'hypothèse : « il y a une chance sur deux (donc la probabilité est 0,5) que thème A soit évalué le jour de l'examen ».
Dans un échantillon de taille n=34, on suppose p=0,5
$n=34\geqslant 30$, $n\,p=34\times 0,5=17\geqslant 5$ et $n(1-p)=34\times 0,5=17\geqslant 5$ donc onpeut établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion que le thème A soit évalué le jour de l'examen.

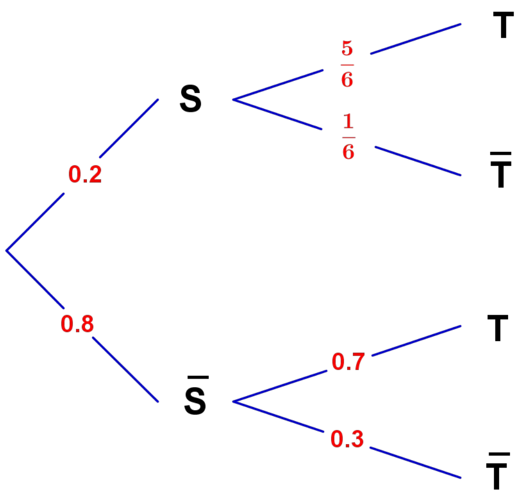
$I=\left[p-1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{[\sqrt{n}}\right]=\left[0,5-1,96\times\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{34}};0,5+1,96\times\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{34}}\right]$

$I=[0,5-0,168;0,5+0,168]=[0,332;0,668]$

$f=0,647$ appartient à cet intervalle donc, **au seuil de 95 %, on ne rejette pas l'hypothèse** : « il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué le jour de l'examen ».

Partie B

On choisit au hasard un étudiant parmi ceux qui se présentent à l'examen et on note :
. S l'événement : « l'étudiant a participé au stage »
. $\bar{S}$ l'événement : « l'étudiant n'a pas participé au stage »
. T l'événement : « l'étudiant traite l'exercice portant sur le thème A »
. $\bar{T}$ l'événement : « l'étudiant n'a pas traité l'exercice ôrtant sur le thème A ».
L'énoncé précise que :
. 20 % des étudiants participent au stage
$P(S)=0,2$ et $P(\bar{S})=1-P(S)=1-0,2=0,8$
. 30 % des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice portant sur le thème A
$P_{\bar{S}}(\bar{T})=0,3$ et $P_{\bar{S}}(T)=1-P_{\bar{S}}(\bar{T})=1-0,3=0,7$
. $\frac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage traitent l'exercice portant sur le thème A
$P_S(T)=\frac{5}{6}$ et $P_S(\bar{T})=1-P_S(T)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$
On obtient l'arbre pondéré suivant :



On nous demande de calculer $P_{\bar{T}}(S)$

Or $P_{\bar{T}}(S)=\frac{P(S\cap\bar{T})}{P(\bar{T})}$

En utilisant l'arbre pondéré ou le théorème des probabilités totales :

$P(\bar{T})=P(S\cap\bar{T})+P(\bar{S}\cap\bar{T})=0,2\times\frac{1}{6}+0,8\times0,3=\frac{1}{30}+0,24=\frac{1+0,24\times30}{30}=\frac{1+7,2}{30}=\frac{8,2}{30}$

$P(S\cap\bar{T})=\frac{1}{30}$

$P_{\bar{T}}(S)=\frac{1}{30}:\frac{8,2}{30}=\frac{1}{8,2}=\frac{5}{41}$ = **0,122** à 0,001 près

Partie C

T est la variable aléatoire, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu=225$ et d'écart-type σ où $\sigma>0$.
On a $P(T\leqslant225)=0,98$.

$(T\leqslant225) \Leftrightarrow \frac{T-225}{\sigma}\leqslant\frac{235-225}{\sigma} \Leftrightarrow \frac{T-225}{\sigma}\leqslant\frac{10}{\sigma}$

La variable aléatoire $Z=\frac{T-225}{\sigma}$ suit la loi normale centrée et réduite.

$P(T\leqslant235)=P\left(Z\leqslant\frac{10}{\sigma}\right)=0,98$

En utilisant la calculatrice on détermine le nombre a tel que $P(Z\leqslant a)=0,95$;
On obtient $a=2,0537$ à 10^{-4} près.

Donc $\frac{10}{\sigma}=2,0537 \Leftrightarrow \sigma=\frac{10}{2,0537}$ = **4,9 à 0,1 près.**