Exercice 4 — 3 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$.

On obtient à l »aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	$\frac{1}{2}$	0.5
5	2	$\frac{2}{3}$	0.666666667
6	3	$\frac{3}{4}$	0.75
7	4	$\frac{4}{5}$	0.8
8	5	$\frac{5}{6}$	0.833333333
9	6	$\frac{6}{7}$	0.857142857
10	7	$\frac{7}{8}$	0..875
11	8	$\frac{8}{9}$	0.888888889
12	9	$\frac{9}{10}$	0.9
13	10	$\frac{10}{11}$	0.909909909

Prouver que la suite (u_n) converge.

CORRECTION

(u_n) est la suite déterminer par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$.

En considérant le tableau les valeurs de u_n (pour les 11 premières valeurs de n), on peut faire la conjecture :
pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{n}{n+1}$

On veut démontrer cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

On veut démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n=\frac{n}{n+1}$

Initialisation

Pour n=0 $u_0=0$ et $\frac{0}{1}=0$ donc la propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n=\frac{n}{n+1}$ et on doit démontrer que $u_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$. Or

$$u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}}=\frac{n+1}{2n+2-n}=\frac{n+1}{n+2}$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{n}{n+1}$.

Pour étudier la convergence de la suite (u_n) on utilise les propriétés sur les limites.
Pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

Conclusion

La suite (u_n) converge vers 1.