Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J;K)$.
On considère les points :
$A(-1;-1;0)$, $B(6;-5;1)$, $C(1;2;-2)$ et $S(13;37;54)$

1.a. Justifier que les A,B et C définissent bien un plan.

1.b. Prouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1.c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2.a. Déterminer la nature du triangle ABC.

2.b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\frac{\sqrt{1122}}{2}$

3.a. Prouver que les points A,B,C et S ne sont pas coplanaires.
3.b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point H. Déterminer les coordonnées du point H.

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\frac{Aire\ de\ la\ base \times hauteur}{3}$

CORRECTION

$(O;I;J;K)$ est un repère orthonormé de l'espace.
$A(-1;-1;0)$, $B(6;-5;1)$, $C(1;2;-2)$ et $S(13;37;54)$

1.a. Les points A, B et C définissent bien un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

Il n'existe pas de réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda.\overrightarrow{AB}$ donxc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Conclusion

Les points A,B et C définissent bien un plan.

1.b. $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=7\times5+(-4)\times16+1\times29=35-64+29=0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=2\times5+3\times16+(-2)\times29=10+48-58=0$

Conclusion

Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

1.c. $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=5\times(x+1)+16\times(y+1)+29\times z=5x+16y+29z+21$

Conclusion

(ABC) : 5x+16y+29z+21=0

2.a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ $AB^2=7^2+4^2+1^2=49+16+1=66$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ $AC^2=2^2+3^2+2^2=4+9+4=17$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\7\\-3\end{pmatrix}$ $BC^2=5^2+7^2+3^2=25+49+9=83$

On remarque que : $BC^2=AB^2+AC^2$.

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que **le triangle ABC est rectangle en A.**

2.b. $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle ABC en unités d'aire

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{66}\times\sqrt{17}=\frac{\sqrt{66\times17}}{2}=\frac{\sqrt{1122}}{2}$$

3.a. A, B, C et S ne sont pas coplanaires si et seulement si S n'appartient pas au plan (ABC).

(ABC) : 5x+16y+29z+21=0 et $S(13;37;54)$

$5\times13+16\times37+29\times54+21=2244\neq0$

donc le point S n'appartient pas au plan (ABC)

Conclusion

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3.b. (Δ) est la droite passant par S et de vecteur directeur $\vec{n}$.
On obtient pour représentation paramétrique de (Δ)

$$\begin{cases} x=5t+13 \\ y=16t+37 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=29t+54 \end{cases}$$

Pour déterminer les coordonnées du point H d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) , on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 5x+16y+29z+21=0 \\ x=5t+13 \\ y=16t+37 \\ z=29t+54 \end{cases}$$

On obtient :

$$5(5t+13)+16(16t+37)+29(29t+54)+21=0 \quad\Leftrightarrow\quad 25t+65+256t+592+841t+1566+21=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 1122t=-2244 \quad\Leftrightarrow\quad t=-\frac{2244}{1122}=-2$$

$$\begin{cases} x=5\times(-2)+13=3 \\ y=16\times(-2)+37=5 \\ z=29\times(-2)+54=-4 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u>

H(3;5 ;-4)

4. Pour le tétraèdre SABC, on choisit le triangle ABC pour base et la hauteur issue de S est SH.

$$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix} -10 \\ -32 \\ -58 \end{pmatrix} \qquad SH^2=10^2+32^2+58^2=100+1024+3364=4488=4\times1122$$

$$SH=2\times\sqrt{1122}$$

Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre SABC en unités de volume est :

$$\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{1122}\times2\times\sqrt{1122}}{3}$$

$$\mathcal{V}=\frac{1122}{3}=\mathbf{374}$$