Exercice 1 5 points

Les parties A,B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.
La chocolaterie « choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

A l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc...
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication.

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,95.

A la fin de la journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l'événement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'événement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C)=0{,}03x+0{,}95$.

2. A l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocalat. Sa durée de vie, en années, peut-être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle

2. Calculer $P(Z>2)$.

3. Sachant que la machine de l'atelier à déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimé en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=85$ et d'écart-type $\sigma=2$.

1. Calculer $P(83<X<87)$.
Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur sur l'emballage ?

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que : $P(85-a<X<85+a)=0{,}9$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

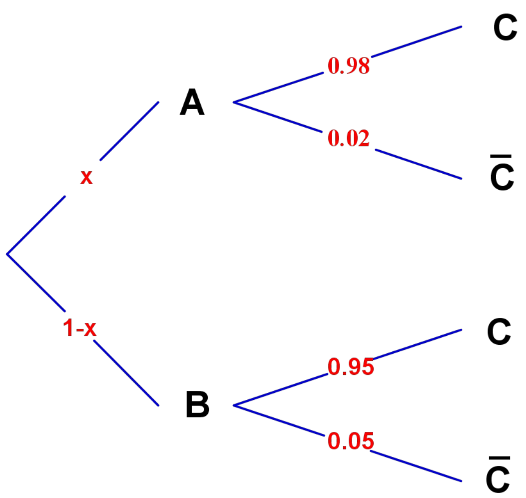
3. La chocolaterie vend un lot de 10000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartient à l'intervalle [81,7;88,3].
Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.
Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

CORRECTION

Partie A

A la fin de la journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette de chocolat.
A est l'événement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne A ».
$\bar{A}=B$ est l'événement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne B ».
C est l'événement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
L'énoncé précise :

- La chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,98.
  Donc $P_A(C)=$ **0,98** et $P_A(\bar{C})=1-P_A(C)=1-0{,}98=$ **0,02.**
- La chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.
  Donc $P_B(C)=$ **0,95** et $P_B(\bar{C})=1-P_B{}'C¿=1-0{,}95=$ **0,05**
- x est la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.
  Donc $P(A)=x$ et $P(\bar{A})=P(B)=1-P(A)=$ **1-x**
- On obtient l'arbre de probabilités suivant :



1. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales :
$P(C)=P(C\cap A)+P(C\cap B)=P(A)\times P_A(C)+P(B)\times P_B(C)$
$P(C)=x\times 0{,}98+(1-x)\times 0{,}95=(0{,}98-0{,}95)x+0{,}95=$ **0,03x+0,95.**

2. A l'issue de la production on constate que 96 % des tablettes de chocolat sont commercialisables.
Donc $P(C)=0{,}96$.

$0{,}03x+0{,}95=0{,}96 \Leftrightarrow 0{,}03x=0{,}01 \Leftrightarrow x=\frac{0{,}01}{0{,}03}=\frac{1}{3}$

donc $P(A)=\frac{1}{3}$ et $P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Conclusion
La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

1. Z est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramère λ
La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans donc l'espérance mathématique de Z est égale à 5.

Or $E(Z)=\frac{1}{\lambda}=5 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{5}=$ **0,2.**

2. La fonction de densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre 0,2 est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=0{,}2\,e^{-0{,}2x}$ et la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=-e^{-0{,}2x}$ est une primiitive de f sur $[0;+\infty[$.
Pour tout nombre réel positif ou nul a :

$$P(Z\leqslant a)=\int_0^a f(x)\,dx=F(a)-F(0)=-e^{-0{,}2a}+e^0=1-e^{-0{,}2a}$$

$$P(a<Z)=1-P(Z\leqslant a)=1-(1-e^{-0{,}2a})=e^{-0{,}2a}$$

donc $P(2<Z)=e^{-0{,}4}=$ **0,670** à 10^{-3} près.

3. On nous demande de calculer $P_{(3\leqslant Z)}(5<Z)$.
Or la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement c'est à dire que pour tous nombres réels positifs a et b tels que $a\leqslant b$:
$P_{(a\leqslant Z)}(b<Z)=P(b-a<Z)$
donc $P_{(3\leqslant Z)}(5<Z)=P(5-3<Z)=P(2<Z)=$ **0,670** à 10^{-3} près.

Partie C

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu=85$ et d'écart-type $\sigma=2$.

1. En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(83<X<87)=$ **0,683** à 10^{-3} près.

. Remarque
En utiisant le cours :
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart- type σ alors
$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=$ **0,683** à 10^{-3} près.
Pour l'exemple :
$P(85-2<X<85+2)=P(83<X<87)=$ **0,683** à 10^{-3} près.

. La probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé (85%) sur l'emballage est égale à : $1-P(83<X<87)=1-0{,}683=$ **0,317** à 10^{-3} près.

2. Pour tout nombre réel positif a : $P(85-a<X<85+a)=1-2P(X\leqslant 85-a)$.
Conséquence
$P(85-a<X\leqslant 85+a)=0{,}9 \Leftrightarrow P(X\leqslant 85-a)=0{,}05$
En utilisant la calculatrice on obtient le nombre réel b tel que : $P(X\leqslant b)=0{,}05$
$b=81{,}71$ à 10^{-2} près et $85-a=81{,}71 \Leftrightarrow$ **a = 3,29** à 10^{-2} près.
Interpétation
90 % des tablettes de chocolat ont une teneur en cacao (en pourcentage) appartenant à l'intervalle [81,71;88,29].

3. On prélève au hasard, 550 tablettes parmi les 10000 tablettes (on peut considérer que les tirages sont effectués avec remise).
On suppose que 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7;88,3].
Donc la probabilité p de prélever au hasard une tablette dont le pourcentage de cacao appartient à l'intervalle [81,7;88,3] est égale à 0,9.
$n=550\geqslant 30$; $np=550\times 0{,}9=495\geq 5$ et $n(1-p)=550\times 0{,}1=55\geqslant 5$.
On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_n=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \quad I_{550}=\left[0{,}9-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{550}};0{,}9\times+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{550}}\right]$$

En utilisant la calculatrice :

$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}9\times 0{,}1}{550}}=0{,}03$ à 10^{-2} près et $I_{550}=[0{,}87;0{,}93]$.

La proportion de tablettes répondant au critère dans l'échantillon est :
$1-\frac{80}{550}=\frac{470}{550}=0{,}85$ à 10^{-2} prés.
0,85 n'appartient pas à l'intervalle I_{550} .
<u>Conclusion</u>
L'affirmation est mensongère au risque de 5 % d'erreur.