Exercice 2 3 points

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. On considère l'équation (E) : $z^2-6z+c=0$
où c est un nombre réel strictement supérieur à 9.

1.a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

1.b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A=3+i\sqrt{c-9}$ et $z_B=3-i\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du nombre réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

CORRECTION

1.a. (E) : $z^2-6z+c=0$

c est un nombre réel strictement supérieur à 9.

$\Delta=(-6)^2-4c=4(9-c)<0$

donc (E) admet deux solutions complexes non réelles (et conjuguées).

1.b. $\Delta=-4(c-9)=4i^2(c-9)=(2i\sqrt{c-9})^2$

donc $z_A=\dfrac{6+2i\sqrt{c-9}}{2}=3+i\sqrt{c-9}$ et $z_B=\dfrac{6-2i\sqrt{c-9}}{2}=3-i\sqrt{c-9}$

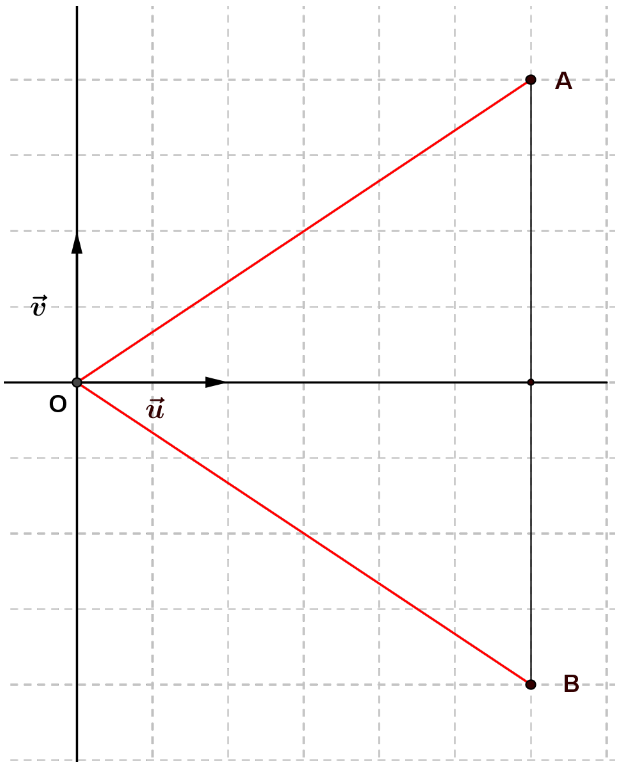
2. $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $O(0)$

$OA^2=|z_A-0|^2=|z_A|^2=9+(c-9)=c$

$OB^2=|z_B-0|^2=|z_B|^2=9+(c-9)=c$

$OA=OB$ donc le triangle OAB est isocèle en O.

On donne une figure non demandée (pour n=13).



3. Si le triangle OAB est rectangle alors il est rectangle isocèle en O.

. On peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.

$\overrightarrow{AB}(-2i\sqrt{c-9})$ $AB^2=|-2i\sqrt{c-9}|^2=4(c-9)$.

Le triangle OAB est rectangle en O si et seulement si $OA^2+OB^2=AB^2$

$\Leftrightarrow$ $c+c=4(c-9)$ $\Leftrightarrow$ $2c=4\times 9$ $\Leftrightarrow$ $c=18$

Conclusion

Le triangle OAB est rectangle si et seulement si c = 18.

On obtient $A(3+3i)$ et $B(3-3i)$

. Remarque

Soit I le milieu de [AB], $I(3)$.

On peut aussi remarquer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O si et seulement si le triangle OIA est rectangle isocèle en I Donc si et seulement si $IO=IA=3$.

Donc $AB=6$ et $4(c-9)=36$ $\Leftrightarrow$ $4c=72$ $\Leftrightarrow$ $c=18$

On donne une figure non demandée our n=18