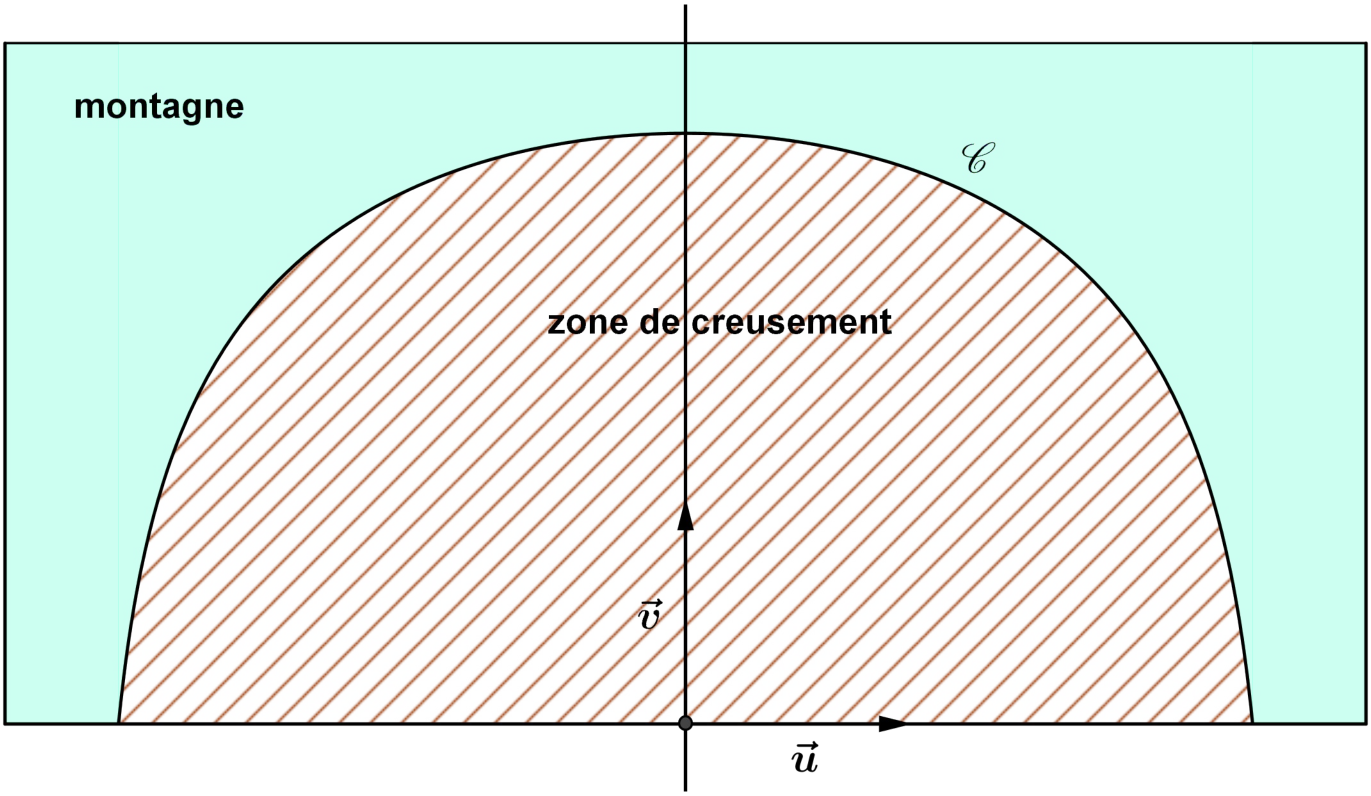
Exercice 3 4 points

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [-2,5;2,5] par :
$f(x)=\ln(-2x^2+13{,}5)$
L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Etude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle [-2,5;2,5].
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur [-2,5;2,5].

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.
1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle n arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.

2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A}=8\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de I= $\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ notée a.

On admet que : $a \leqslant I \leqslant a+\frac{f(0)-f(2{,}5)}{n}\times 2{,}5$.

3.a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour n=50.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
3.b. En déduire une valeur approchée, au mètre près, de l'aire de la zone de creusement.

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

Algorithme

Variables : R et S sont des nombres réels
n et k sont des entiers

Traitement : S prend la valeur 0
Demander la valeur de n
Pour k variant de 1 à n faire
    R prend la valeur $\frac{2{,}5}{n} \times f\left(\frac{2{,}5}{n} \times k\right)$
    S prend la valeur $S+R$
Fin Pour
Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-3} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour n = 50.

Initialisation	**S=0 , n=50**		
Boucle Pour	**Etape k**	**R**	**S**
	1	. . .	. . .
	2	**0.130060**	**0.260176**
	3	**0.129968**	**0.390144**
	4	**0.129837**	. . .
	⋮		⋮
. . .	**24**	**0.118137**	**3.025705**
	25	**0.116970**	**3.142675**
	⋮		⋮
	49	**0.020106**	**5.197538**
	50	. . .	. . .
Affichage	**S= . . .**		

CORRECTION

f est définie sur l'intervalle [-2,5;2,5] par $f(x)=\ln(-2x^2+13{,}5)$.

Remarque

$u(x)=-2x^2+13{,}5=2(6{,}75-x^2)=2(x+\sqrt{6{,}75})(\sqrt{6{,}75}-x)$

$\sqrt{6{,}75}=2{,}60$ à 10^{-2} près

Conséquence

$u(x)>0 \Leftrightarrow -\sqrt{6{,}75}<x<\sqrt{6{,}75}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2,5;2,5], $u(x)>0$.

Partie A : Etude de la fonction f

1. $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$ $\quad u'(x)=-4x$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2,5;2,5], $f'(x)=\dfrac{-4x}{-2x^2+13{,}5}$.

2. Le signe de $f'(x)$ sur [-2,5;2,5] est le signe de -4x donc f est croissante sur [-2,5;0] et décroissante sur [0:2,5]

$f(-2{,}5)=f(2{,}5)=\ln(-2\times 6{,}25+13{,}5)=\ln(1)=0$

$f(0)=\ln(13{,}5)=2{,}60$ à 10^{-2} près.

Tableau de variation

x	-2.5		0		2.5
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	f(0)	↘	0

Conséquence

La fonction f est positive sur]-2,5;2,5[donc f est du signe + sur cet intervalle.

Partie B : aire de la zone de creusement

1. $\mathscr{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O.

Justification

$f(2{,}5)=0 \quad A(2{,}5;0)$ et $B(0:f(0)) \quad f(0)=2{,}60$ à 10^{-2} près.

A et B sont deux points de la courbe $\mathscr{C}$ et $OA\neq OB$.

2. f est continue et positive sur [-2,5;2,5] donc l'aire, en unités d'aire, est $\int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx$.

On suppose que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc :

$\int_{-2,5}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$ et $\int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$.

L'unité de longueur est égale à 2 m donc l'unité d'aire est égale à 4 m^2.

Conséquence

L'aire de la zone de creusement en m^2 est : $\mathscr{A}=8\int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$.

3.a. Pour $k=1$ R prend la valeur $\frac{2,5}{50}\times f\left(\frac{2,5}{50}\times 1\right)=0,05\times f(0,05)=$ **0,130116**

S prend la valeur $0+0,130116=$ **0,130116**

Pour $k=4$ S prend la valeur $0,390144+0,129837=$ **0,519981**

Pour $k=50$ R prend la valeur $\frac{2,5}{50}\times f\left(\frac{2,5}{50}\times 50\right)=0,05\times f(2,5)=$ **0**

S prend la valeur $5,197538+0=$ **5,197538**

Affichage **S = 0,5,197538**

On donne le tableau complété

Initialisation	**S=0 , n=50**		
Boucle Pour	**Etape k**	**R**	**S**
	1	0.130116	0.130116
	2	0.130060	0.260176
	3	0.129968	0.390144
	4	0.129837	0.519981
	⋮		⋮
...	24	0.118137	3.025705
	25	0.116970	3.142675
	⋮		⋮
	49	0.020106	5.197538
	50	0	5.197538
Affichage	S= 5.197538		

3.b. $\mathcal{A}=8I$

$a=5,197538$ et $a\leqslant I\leqslant a+\frac{f(0)-f(25)}{50}\times 2,5$

$\frac{f(0)-f(2,5)}{50}\times 2,5=f(0)\times 0,05=0,130134$ à 10^{-6} près

$0,5,197568+0,130134=5,327672$

$5,197538\leqslant I\leqslant 5,327672$

$41,580304\leqslant 8I\leqslant 42,621376$

Donc $\mathcal{A}=$ **42** m^2 au mètre carré près.

<u>Complément</u> (non demandé)

. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g(x)=\ln(x)$ et $G(x)=x\ln(x)-x$, on peut vérifier que G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

. b est un nombre réel positif fixé.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-b;+\infty[$, $h(x)=\ln(x+b)$ et $H(x)=(x+b)\ln(x+b)-x$, on peut vérifier que H est une primitive de h sur $]-b;+\infty[$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty;b[$, $p(x)=\ln(b-x)$ et $P(x)=(x-b)\ln(b-x)-x$, on peut vérifier que P est une primitive de p sur $]-\infty;b[$.

. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2,5;2,5],
$f(x)=\ln(-2x^2+13,5)=\ln(2(x+\sqrt{6,75})(\sqrt{6,75}-x))=\ln(2)+\ln(x+\sqrt{6,75})+\ln(\sqrt{6,75}-x)$ et
$F(x)=x\ln(2)+(x+\sqrt{6,75})\ln(x+\sqrt{6,75})-x+(x-\sqrt{6,75})\ln(\sqrt{6,75}-x)-x$
F est une primitive de f sur [-2,5;2,5].
$I=F(2,5)-F(0)$ on a $F(0)=0$ et $F(2,5)=5,264671$ à 10^{-6} près
$\mathcal{A}=6I=42,117368$ donc $\mathcal{A}=42$ m^2 au mètre carré près.