Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère des suites (u_n) et (v_n).

. La suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=2u_n-n+3$

. La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n=2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été rentrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6153	2048
14	12	12298	4096
15	13	24587	8192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=3\times 2^n+n-2$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Etude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, on a : $0<\frac{n}{2^n}<\frac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

CORRECTION

Partie A : Conjectures

1. Cellule B3 : $=2\times B2-A2+3$
Cellule C3 : $=2\times C2$ ou $=2\text{^}A3$

2. Pour la suite (u_n) d'une ligne à l'autre on multiplie presque par 2 donc on conjecture :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

. Pour la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$:

on donne des valeurs approchées à 10^{-4} près

$\dfrac{u_{10}}{v_{10}}=\dfrac{3080}{1024}=3{,}0078$; $\dfrac{u_{11}}{v_{11}}=\dfrac{6153}{2048}=3{,}0044$; $\dfrac{u_{12}}{v_{12}}=\dfrac{12298}{4096}=3{,}0024$; $\dfrac{u_{13}}{v_{13}}=\dfrac{24587}{8192}=3{,}0013$

On conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=3$.

Partie B : Etude de la suite (u_n)

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n=3\times2^n+n-2$.

Initialisation

Pour n=0 $u_0=1$ et $3\times2^0+0-2=3-2=1$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que, pour tout entier naturel n, la propriété est héréditaire on suppose que
$u_n=3\times2^n+n-2$ et ondoit démontrer que $u_{n+1}=3\times2^{n+1}n+1-2=3\times2^{n+1}+n-1$.

Or $u_{n+1}=2u_n-n+3=2(3\times2^n+n-2)-n+3=3\times(2^n\times2)+2n-4-n+3=3\times2^{n+1}+n-1$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n=3\times2^n+n-1$

2. Pour tout entier naturel n : $3\times2^n>0$ donc $u_n>n-2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n-2=+\infty$

Conséquence

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n>10^6$ c'est à dire $3\times2^n+n-2>10^6$.

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$u_{18}=786448$ et $u_{19}=1572865$

On remarque que la suite (u_n) est croissante (pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}-u_n=3\times2^{n+1}+n-2-3\times2^n-n+2=3\times2^n+1>0$)

Conclusion

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n>10^6$ est **19** .

Partie C : Etude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Pour tout entier natureln supérieur ou égal à 3.

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}-\frac{u_n}{v_n}=\frac{3\times 2^{n+1}+n+1-2}{2^{n+1}}-\frac{3\times 2^n+n-2}{2^n}=3+\frac{n-1}{2^{n+1}}-\left(3+\frac{n-2}{2^n}\right)=\frac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}}=\frac{-n+3}{2^{n+1}}\leqslant 0$$

La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. Pour tout entier naturel n : $\frac{u_n}{v_n}=3+\frac{n}{2^n}-\frac{2}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{2^n}=0$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 : $0<\frac{n}{2^n}<\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}=0$

<u>Conclusion</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=$ **3.**

