## Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On définit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par :
$u_0=v_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=2u_n+3v_n$ et $v_{n+1}=2u_n+v_n$ .
On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

**Partie A : Conjectures**

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Un copie d'écran est donnée ci-dessous.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | rang n | terme $u_n$ | terme $v_n$ |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 5 | 3 |
| 4 | 2 | 19 | 13 |
| 5 | 3 | 27 | 51 |
| 6 | 4 | 307 | 205 |

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?

2. Soit n entier naturel.
Conjecturer la valeurs de $\mathrm{PGCD}(u_n\,;v_n)$ . Aucune justification n'est demandée.
3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 1258291 | 838861 |
| 13 | 11 | 5033165 | 3355443 |
| 14 | 12 | 20132659 | 13421773 |
| 15 | 13 | 80530637 | 53687091 |

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».

Qu'en penser ?

**Partie B : Etude arithmétique**

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.

2. Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de $\mathrm{PGCD}(u_n\,;v_n)$.

**Partie C : Etude matricielle**

Pour tout entier naturel n, on définit :

. la matrice colonne $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$ ,

. les matrices carrées $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$ et $Q_n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 3\times 2^{2n}\\(-1)^{n+1} & 2^{2n+1}\end{pmatrix}$

**1.a.** Montrer que la matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

**1.b.** On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$

**2.a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 2}$

**2.b.** En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

 

**CORRECTION**

**Partie A : Conjectures**

1. **Cellule B3 :** =2xB2+3xC2
. **Cellule C3 :** =2xB2+C2

2. On constate que :
$PGCD(5;3)=PGCD(19;13)=PGCD(77;51)=PGCD(307;205)=1$
On conjecture : $PGCD(u_n;v_n)=1$.

3. Les valeurs approchées sont données à $10^{-9}$ près.
$\frac{u_{10}}{v_{10}}=\frac{1258291}{838861}=1{,}499999940$
$\frac{u_{11}}{v_{11}}=\frac{5033165}{3355443}=1{,}500000015$
$\frac{u_{12}}{v_{12}}=\frac{20132659}{13421773}=1{,}499999963$
$\frac{u_{13}}{v_{13}}=\frac{80530637}{53687091}=1{,}500000009$
On conjecture : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1{,}5$.

**Partie B : Etude arithmétique**

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.
<u>Initialisation</u>
Pour n=0 $u_0=v_0=1$
$2u_0-3v_0=2-3=-1$ et $(-1)^{0+1}=-1$
La propriété est vérifée pour n=0.
<u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréritaire, pour tout entier naturel n, on suppose que
$2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$ et on doit démontrer que $2u_{n+1}-3v_{n+1}=(-1)^{n+2}$.
Or $u_{n+1}=2u_n+3v_n$ et $v_{n+1}=2u_n+v_n$
$2u_{n+1}-3v_{n+1}=2(2u_n+3v_n)-3(2u_n+v_n)=4u_n+6v_n-6u_n-3v_n=-2u_n+3v_n=-(2u_n-3v_n)$
$2u_{n+1}-3v_{n+1}=-1\times(-1)^{n+1}=(-1)^{n+2}$
<u>Conclusion</u>
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.

2. <u>**Théorème de Bezout**</u>
**Deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que ax+by=1**
. Pour tout entier naturel n pair alors n+1 est impair et $(-1)^{n+1}=-1$
donc $2u_n-3v_n=-1$ soit $-2u_n+3v_n=1$
x=-2 et y=3 donc $PGCD(u_n;v_n)=1$
. Pour tout entier naturel n impair alors n+1 est pair et $(-1)^{n+1}=1$
donc $2u_n-3v_n=1$
x=2 et y=-3 donc $PGCD(u_n;v_n)=1$

. <u>Conclusion</u>
Pour tout entier naturel n, $\text{PGCD}(u_n ; v_n) = 1$.

**Partie C : Etude matricielle**

**1.a.** On note $R=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$PR=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3 & -3+3 \\ -2+2 & 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

de même $RP=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$P\times\left(\frac{1}{5}R\right)=\frac{1}{5}(PR)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \left(\frac{1}{5}\right)R\times P=\frac{1}{5}(RP)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion</u>

P est inversible et $P^{-1}=\frac{1}{5}R=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**1.b.** On admet que pour tout entier naturel n, $X_n=Q_nP^{-1}X_0$

$$X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad Q_n=\begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \quad P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}X_0=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 1+1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Q_nP^{-1}X_0=\begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}-3\times2^{2n+1}}{5} \\ \dfrac{(-1)^{n+2}+2^{2n+2}}{5} \end{pmatrix}$$

Or $(-1)^{n+2}=(-1)^n\times(-1)^2=(-1)^n$

$$X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{(-1)^{n+1}-3\times2^{2n+1}}{5} \\ \dfrac{(-1)^n+2^{2n+2}}{5} \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}+3\times2^{2n+1}}{5} \\ v_n=\dfrac{(-1)^n+2^{2n+2}}{5} \end{cases}$$

**2.a.** $$\frac{u_n}{v_n}=\frac{(-1)^{n+1}+3\times2^{2n+1}}{(-1)^n+2^{2n+2}}=\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}+3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}+2}$$

**2.b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{2n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}=0$

<u>Conséquence</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{3}{2}$.