

**Exercice 1****5 points**

Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.  
Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A**

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu=2900$  euros et d'écart-type  $\sigma=1250$  euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?
2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Que doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ? Donner ce montant à l'euro près ?

**Partie B**

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté l'entrepreneur sait que 60 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les événements suivants :

- .  $D$  : « le message est déplacé » ;
- .  $S$  : « le message est un spam ».

1. Calculer  $P(S \cap D)$ .
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.  
Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

**CORRECTION**

**Partie A**

1. On nous demande de déterminer  $P(4000 \leq X)$

En utilisant la calculatrice, on obtient :  $P(4000 \leq X) = 0,189$ .

2. On nous demande de déterminer le nombre réel  $a$  tel que  $P(X \leq a) = 0,1$ .

En utilisant la calculatrice et en arrondissant à l'euro près, on obtient :  $a = 1298 \text{ €}$ .

**Partie B**

L'énoncé précise :

• « l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams »

Conséquences

$$P(S) = 0,6 \text{ et } P(\bar{S}) = 1 - 0,6 = 0,4$$

• « le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés »

Conséquences

$$P_S(D) = 0,95 \text{ et } P_S(\bar{D}) = 1 - 0,95 = 0,05$$

• « l'entrepreneur constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam »

Conséquences

$$P(D) = 0,586 \text{ et } P(\bar{D}) = 1 - 0,586 = 0,414$$

1.  $P(S \cap D) = P(S) \times P_S(D) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$

2. On nous demande de calculer  $P_{\bar{S}}(D)$

$$P_{\bar{S}}(D) = \frac{P(D \cap \bar{S})}{P(\bar{S})}$$

En utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap S) + P(D \cap \bar{S})$$

$$P(D \cap \bar{S}) = P(D) - P(D \cap S) = 0,586 - 0,57 = 0,016$$

$$\text{Or } P(\bar{S}) = 0,4$$

$$P_{\bar{S}}(D) = \frac{0,016}{0,4} = 0,04$$

3. On nous demande de calculer  $P_{\bar{D}}(S)$

$$P_{\bar{D}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$P(S \cap \bar{D}) = P(S) \times P_S(\bar{D}) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$$

$$\text{Or } P(\bar{D}) = 0,414$$

$$P_{\bar{D}}(S) = \frac{0,03}{0,414} = 0,072$$

4. Le fabricant estime que la probabilité qu'un message déplacé vers le dossier spam soit un message fiable est :  $p = 0,027$ .

La taille de l'échantillon est  $n = 231$ .

$$n = 231 \geq 30 ; np = 6,237 \geq 5 \text{ et } n(1-p) = 224,763 \geq 5$$

On considère l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I = \left[ 0,027 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}} ; 0,027 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}} \right]$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}} = 0,021 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

$$T = [0,006; 0,048]$$

13 messages sont fiables parmi les 231 messages déplacés.

La proportion de messages fiables déplacés, observée est :  $f = \frac{13}{231} = 0,056$ .

0,056 n'appartient pas à l'intervalle I.

**Avec un risque d'erreur de 5 %, ces résultats remettent en cause l'affirmation du fabricant.**