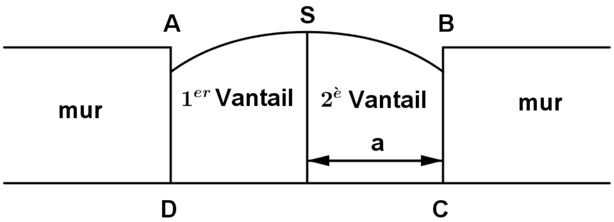
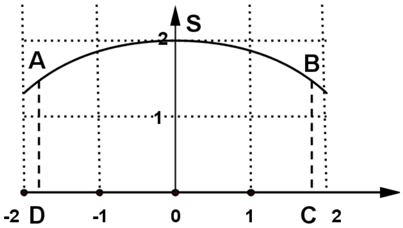
Exercice 2 5 points

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0<a\leqslant 2$.
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-dessous.



Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail.
Entre les les points A et B , le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.
Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur [-2;2] par :
$f(x)=-\frac{b}{8}\left(\text{€}^{\frac{x}{b}}+e^{-\frac{x}{b}}\right)$ où $b>0$.
Le repère est choisi de façon que les points A,B,C et D aient pour coordonnées respectives $(-a;f(-a))$, $(a;f(a))$, $(a;0)$ et $(-a;0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-dessous.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [-2;2], $f(-x)=f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [-2;2] :
$f'(x)=-\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}}-e^{-\frac{x}{b}}\right)$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [-2;2] et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol on cherche alors les valeurs de a et b.
1. Justifier que $b=1$.

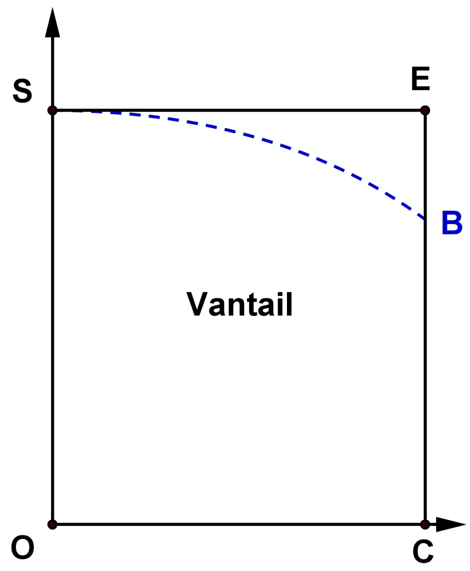
2. Montrer que l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle [0;2] et en déduire une valeur approchée de a au centième.

3. Dans cette question, on choisit a=1,8 et b=1. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à $20\,kg.m^{-2}$. Que décide le client ?

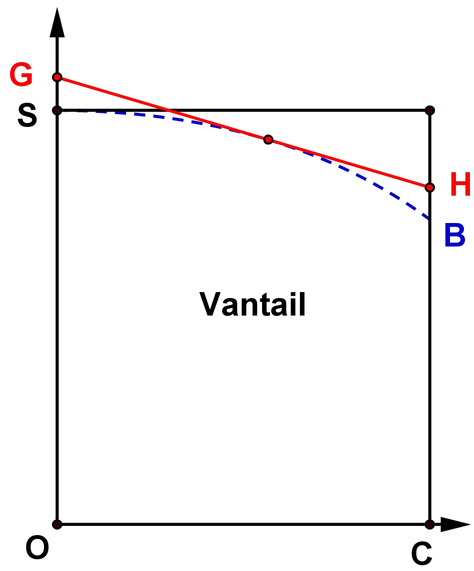
Partie C

On conserve les valeurs a=1,8 et b=1

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse1.



Forme 1: découpe dans un rectangle



Forme 2: découpe dans un trapèze

La Forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semple plus économique.
Evaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.
On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze.

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h$$

CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;2], $f(x)=-\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}}+e^{-\frac{x}{b}}\right)$.

1. $f(-x)=-\frac{b}{8}\left(e^{\frac{-x}{b}}+e^{-\frac{-x}{b}}\right)=-\frac{b}{8}\left(e^{-\frac{x}{b}}+e^{\frac{x}{b}}\right)=f(x)$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle[-2;2], les points $M(x;f(x))$ et $N(-x:f(-x))$ or $N(-x;f(x))$ de la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Conséquence

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

2. $(e^u)'=u'e^u$ donc $\left(e^{\frac{x}{b}}\right)'=\frac{1}{b}e^{\frac{x}{b}}$ et $\left(e^{-\frac{x}{b}}\right)=-\frac{1}{b}e^{-\frac{x}{b}}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;2]

$f'(x)=-\frac{b}{8}\left(\frac{1}{b}e^{\frac{x}{b}}-\frac{1}{b}e^{-\frac{x}{b}}\right)=-\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}}-e^{-\frac{x}{b}}\right)$.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;2]

$f'(x)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}}-e^{-\frac{x}{b}}\right)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\frac{x}{b}}-e^{-\frac{x}{b}}\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\frac{x}{b}}\leqslant e^{-\frac{x}{b}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{b}\leqslant-\frac{x}{b}$

car la fonction expentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{b}\leqslant 0$

Or $b>0$

$\Leftrightarrow \quad x\leqslant 0$

De même $f'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad x>0$

Tableau de variations de f

x	-2		0		2
f'(x)		+	0	−	
f(x)	f(-2)	↗	f(0)	↘	f(2)

$f(2)=f(-2)=-\frac{b}{8}\left(e^{\frac{2}{b}}+e^{-\frac{2}{b}}\right)+\frac{9}{4}$

$f(0)=-\frac{b}{8}(e^0+e^0)+\frac{9}{4}=-\frac{b}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9-b}{4}$

$f(0)$ est l'ordonnée du point S

$S\left(0;\frac{9-b}{4}\right)$

Partie B

1. L'ordonnée du point S est égale à 2 si et seulement si $f(0)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9-b}{4}=2 \quad\Leftrightarrow\quad 9-b=8$

$\Leftrightarrow$ **b = 1**.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-2;2], $f(x)=-\frac{1}{8}(e^{x}+e^{-x})+\frac{9}{4}$

$f(0)=2$ et $f(2)=-\frac{1}{8}(e^{2}+e^{-2})+\frac{9}{4}=1{,}31$ à 10^{-2} près

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [0;2], 1,5 appartient à l'intervalle {f(2);f(0)], le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [0;2].
En utilisant la calculatrice
$f(1{,}8)=1{,}47$ à 10^{-2} près, $f(1{,}75)=1{,}51$ à 10^{-2} près, $f(1{,}76)=1{,}502$ à 10^{-3} près, $f(1{,}77)=1{,}495$ à 10^{-3} près.
α = **1,76 au centième près.**

3. f est continue et positive sur[0;1,8] donc l'aire, en unité d'aire (le m^{2}) d'un vantail es : $\int_{0}^{1,8} f(x)dx$.

$u(x)=e^{x}$ $U(x)=e^{x}$ U est une primitive de u sur [0;1,8]
$v(x)=e^{-x}$ $V(x)=-e^{-x}$ V est une primitive de v sur [0;1,8]
$f(x)=-\frac{1}{8}(e^{x}+e^{-x})+\frac{9}{4}$ $F(x)=-\frac{1}{8}(e^{x}-e^{-x})+\frac{9}{4}x$ F est une primitive de f sur [0;1,8].

$$\int_{0}^{1,8} f(x)dx=F(1{,}8)-F(0)=-\frac{1}{8}(e^{1,5}-e^{-1,8})+\frac{9}{4}\times1{,}8=3{,}31 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

La masse volumique des planches de bois est égale à $20\ kg.m^{-2}$.
$20\times3{,}31=66{,}29\ kg$.
Conséquence
Le client décide d'automatiser le portail.

Partue C

L'aire du rectangle est $2\times1{,}8=3{,}6\ m^{2}$.
Pour le trapèze, on détermine l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

$$f(1)=-\frac{1}{8}\left(e+\frac{1}{e}\right)+\frac{9}{4} \qquad f'(1)=-\frac{1}{8}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$y+\frac{1}{8}\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{9}{4}=-\frac{1}{8}\left(e-\frac{1}{e}\right)(x-1)$$

$$y=-\frac{1}{8}\left(e-\frac{1}{e}\right)x-\frac{1}{4e}+\frac{9}{4}$$

L'ordonnée du point G est : $\frac{9}{4}-\frac{1}{4e}=2{,}158$ donc $B=2{,}158$

L'ordonnée du point H est : $-\frac{1}{8}\left(e-\frac{1}{e}\right)\times1{,}8-\frac{1}{4e}+\frac{9}{4}=1{,}629$ donc $b=1{,}629$

$h=OC=1{,}8$.

L'aire du trapèze est : $\frac{2{,}158+1{,}629}{2}+1{,}8=3{,}4\ m^{2}$ à 10^{-1} près.

Pour un vantail, l'économie de bois est : $0{,}2\ m^{2}$ en choisissant la forme 2 et non la forme 1.
Pour le portail, l'économie de bois est : 0,4 m^{2} en choisissant la forme 2 et non la forme 1.