Exercice 3 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n>0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au priduit des n premiers terms consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n).
Elle vérifie donc trois propriétés/
. $u_0>1$
. pour tout $n\geqslant 0$, $u_n\geqslant 0$
. pour tout $n>0$, $u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$

1. On choisit $u_0=3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n>0$, on note $s_n=u_0+u_2+;..+u_{n-1}=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1=u_0$.
2.a. Vérifier que pour tout entier $n>0$, $s_{n+1}=s_n+u_n$ et $s_n>1$.
2.b. En déduire que pour tout entier $n>0$, $u_n=\dfrac{s_n}{s_n-1}$.
2.c. Montrer que pour tout $n\geqslant 0$, $u_n>1$.

3. A l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut calculer le terme u_n.

Entrée : Saisir n
Saisir u
Traitement : s prend la valeur u
Pour i allant de 1 à n :
u prend la valeur . . .
s prend la valeur . . .
Fin Pour
Sortie : Afficher u

3.a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-dessus.
3. b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1.140	1.079	1.043	1.030	1.023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite u_n ?

4.a. Justifier que pour tout entier $n>0$, $s_n>n$
4.b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de (u_n).

CORRECTION

1. $u_0=3$

$u_0+u_1=u_0\times u_1 \qquad 3+u_1=3\times u_1 \qquad 3=2\times u_1 \qquad u_1=\frac{3}{2}$

$u_0+u_1+u_2=u_0\times u_1\times u_2 \qquad 3+\frac{3}{2}+u_2=3\times\frac{3}{2}\times u_2 \qquad \frac{9}{2}+u_2=\frac{9}{2}\times u_2 \qquad \frac{9}{2}=\frac{9}{2}\times u_2-u_2 \qquad \frac{9}{2}=\frac{7}{2}\times u_2$

$u_2=\frac{9}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{9}{7}$.

2. Pour tout entier $n>0$, on note $s_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$ donc $s_1=u_0$.

2.a. $s_{n+1}=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n=s_n+u_n$.

Pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$

donc $s_n=u_0+u_1+\ldots+u_n\geq u_0>1$

2.b. Pour tout entier $n>0$, $s_n=u_0+u_1+\ldots+s_{n-1}=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$

$s_{n+1}=s_n+u_n=s_n\times u_n$

$s_n=s_n\times u_n-u_n=(s_n-1)\times u_n$

Or $s_n-1>0$

$u_n=\frac{s_n}{s_n-1}$

2.c. Pour tout entier $n>0$

$u_n-1=\frac{s_n}{s_n-1}-1=\frac{s_n-(s_n-1)}{s_n-1}=\frac{1}{s_n-1}>0$ car $s_n>1$

donc $u_n>1$.

3.a. **Traitement :**

s prend la valeur u
Pour i allant de 1 à n
u prend la valeur $\frac{s}{s-1}$
s prend la valeur **s+u**
Fin pour

3.b. Conjecture

(u_n) converge vers 1

4.a. Pour tout entier naturel $n>0$, $s_n=u_0+n_1+\ldots+u_{n-1}$ et pour tout entier $n\geqslant 0$, $u_n>1$.

s_n est la somme de n termes strictement supérieurs à 1 donc s_n est supérieur à n.

$s_n>n$

4.b. $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Pour tout entier naturel $n>0$, $u_n=\frac{s_n}{s_n-1}=1+\frac{1}{s_n-1}$

$\lim_{n\to+\infty}(s_n-1)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{s_n-1}\right)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.