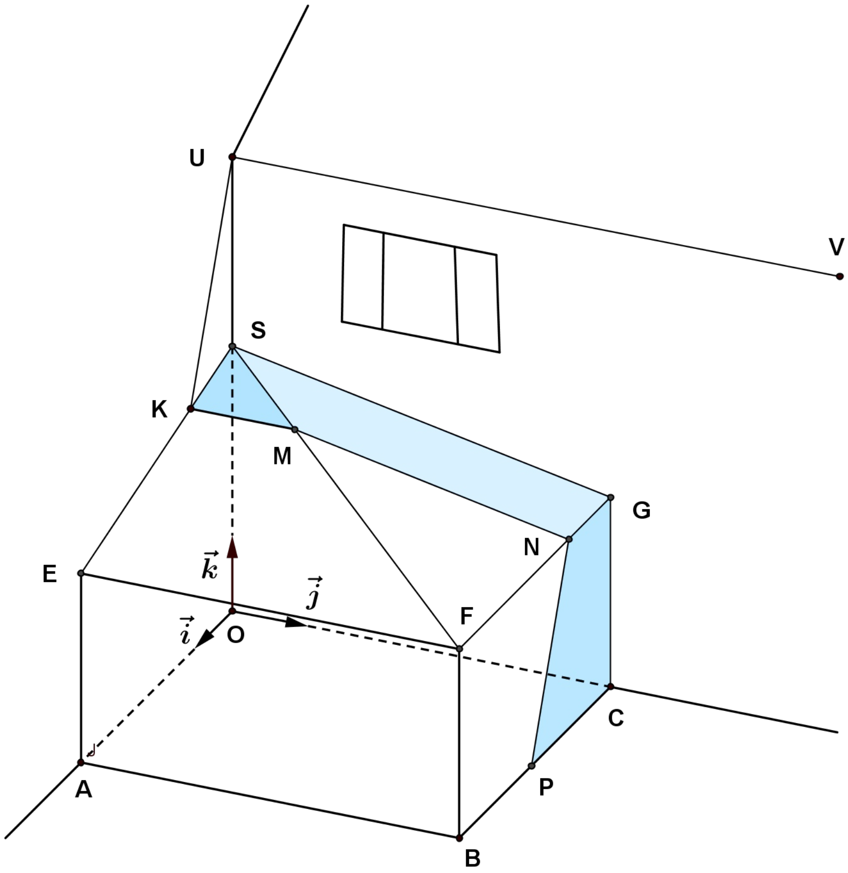
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par te toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette vérenda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$. le toit de la véranda est constitué de deux faces tiangulaires SEF et SFG.

. Les plans (SOA) et SOC) sont perpendiculaires.
. Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles de même que les plans (SOA) et (GCB).
. Les arêtes (UV) et (EF) des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :

1.a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;

1.b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, les coordonnées des différents points sont les suivantes : $A(4;0;0)$, $B(4;5;0)$, $C(0;5;0)$, $E(4;0;2{,}5)$, $F(4;5;;2{,}5)$ $S(0;0;3{,}5)$, $U(0;0;6)$ et $V(0;8;6)$.

On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

2.a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont $(1{,}2;0;3{,}2)$.

2.b. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(7;0;3)$ est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

2.c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

2.d. Expliquer comment construire la ligne polynomiale sur le schéma de la véranda.

3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

CORRECTION

1. Les plans (UVK) et (SEF) sont sécants, leur droite d'intersection est (KM)
Les droites (UV),contenue dans le plan (UVK) et (EF), contenue dans le plan (SEF), sont parallèles.
Le théorème du toit nous permet d'affirmer que (KM) est parallèle à (EF).

. Les plans (SOA) et (SOC) sont parallèles.
Le plan(UVK) est sécant à ces plans, les droites d'intersection (UK) et (KN) sont parallèles.

2.a. (SE) est la droite passant par $S(0;0;3,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{SE}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ de représentation paramétrique $\begin{cases}x=4t\\y=0.t\\z=-t+3,5\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

K appartient à la droite (SE) $x_K=1,2$.

$1,2=4t \Leftrightarrow t=\frac{1,2}{4}=0,3$

$y_K=0$ et $z_K=-03+3,5=3,2$ **K(1,2;0;3,2)**.

2.b. $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}$ $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (UVK) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan (UVK), par exemples les vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$.

$\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}1,2\\0\\-2,8\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{UV}=7\times0+0\times8+3\times0=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{UK}=7\times1,2+0\times0+3\times(-2,8)=8,4-8,4=0$

Conclusion

$\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan (UVK).**

$M(x;y;z)$ Appartient au plan (UVK) si et seulement si $\overrightarrow{UM}.\vec{n}=0$.

$\overrightarrow{UM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-6\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{UM}.\vec{n}=7x+0.y+3\times(z-6)=0$

(UVK) : 7x+3z-18=0.

2.c. (FG) est la droite passant par $F(4;5;2,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$.

Représentation paramétrique de (FG) $\begin{cases}x=-4\lambda+4\\y=5\\z=2,5\end{cases}$ λ décrit $\mathbb{R}$.

Pour déterminer les coordonnées du point N, on résout le système : $\begin{cases}x+3z-18=0\\x=-4\lambda+4\\y=5\\z=2,5\end{cases}$.

$7\times(-4\lambda+4)+3\times2,5-18=0 \Leftrightarrow -28\lambda+28+7,5-18=0 \Leftrightarrow 28\lambda=17,5$

$\lambda=\frac{17,5}{28}=\frac{2,5}{4}=\frac{5}{8}=0,625$

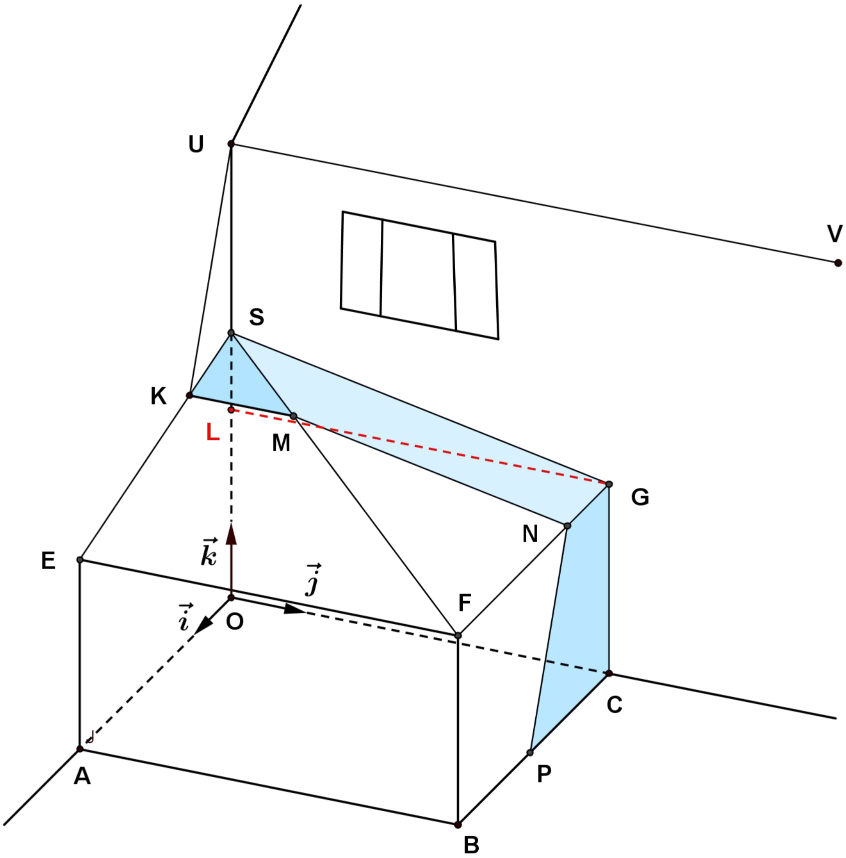
$x=-2,5+4=1,5$

N(1,5;5;2,5).

2.d. On place les points K et N (en ayant les coordonnées).
De K, on mène la parallèle à la droite (EF) qui coupe la droite (SF) en M.
De N, on mène la parallèle à la droite (UK) qui coupe la droite (BC) en P.
Puis on trace la ligne polynomiale KMNP.

3. On considère le point $\mathrm{L}(0;0;2,5)$ puis le triangle SGL $\mathrm{S}(0;0;3,5)$, $\mathrm{G}(0;5;2,5)$

$\overrightarrow{\mathrm{LS}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\mathrm{LG}}\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$.



$\overrightarrow{\mathrm{LS}}.\overrightarrow{\mathrm{LG}}=0$ Le triangle SGL est rectangle en L.

$\overrightarrow{\mathrm{SG}}\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}$ $\mathrm{SG}^2=5^2+(-1)^2=25+1=26$ $\mathrm{SG}=\sqrt{26}$ $\mathrm{LG}=5$

$\cos(\widehat{\mathrm{SGL}})=\dfrac{\mathrm{LG}}{\mathrm{SG}}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

En utilisant la calculatrice on obtient : $\widehat{\mathrm{SGL}}=11,31^\circ$

La condition est donc remplie.