Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une association gère des activités pour les enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque-éveil musical, et le programme B:théâtre- arts plastiques.
A sa création en 2014, l'association compte 150 enfants suivant le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le prpgramme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre , 20 % des inscrits au programmeA choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au progamme B choisissent à nouveau le programme B, les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.
On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année 2014+n respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.
On a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.

3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :
. on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9.
. on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.
Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement on choisit $a = 3$.
1.a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
1.b. L'employé confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08 c_3 c_4 c_5 k$ est transformé en $11 c_3 c_4 c_5 k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?

2. On note $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.
2.a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'inversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si : $(a-1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.
2.b. Déterminer les entiers n compris entre 1 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \ (10)$
2.c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n :

a_n est le nombre d'enfants inscrits au programme A l'année : 2014+n

a_{n+1} est le nombre d'enfants inscrits au programme A l'année : 2014+n+1

b_n est le nombre d'enfants inscrits au programme B l'année : 2014+n

b_{n+1} est le nombre d'enfants inscrits au programme B l'année : 2014+n+1

$a_n+b_n=a_{n+1}+b_{n+1}=150$.

D'une année sur l'autre,20 % des inscrits au programme A choisissent de nouveau le programme A alors que 40 % choisissent le programme B et les autres (100-20-40=40%) quittent l'association.

Conséquences

De l'année 2014+n à l'année 2014+n+1 :

$0{,}2\,a_n$ enfants sont inscrits au programme A

$0{,}4\,a_n$ enfants sont inscrits au programme B

$0{,}4\,a_n$ enfants quittent l'association et sont remplacés par des enfants inscrits au programme A.

D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B, choisissent à son nouveau le programme B et les autres (100-60=40%) quittent l'association.

Conséquences

De l'année 2014+n à l'année 2014+n+1

$0{,}6\,b_n$ enfants sont inscrits au programme B

$0{,}4\,b_n$ enfant quittent l'association et sont remplacés par des enfants inscrits au programme A.

Conclusion

$a_{n+1}=0{,}2\,a_n+0{,}4\,a_n+0{,}4\,b_n=0{,}6\,a_n+0{,}4\,b_n$

$b_{n+1}=0{,}4\,a_n+0{,}6\,b_n$

$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}6\,a_n+0{,}4\,b_n & 0{,}4\,a_n+0{,}6\,b_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}6\,a_n+0{,}4\,b_n & 0{,}4\,a_n+0{,}6\,b_n \end{pmatrix}$

donc $U_{n+1}=U_n M$.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :

$U_n=\begin{pmatrix} 75+75\times 0{,}2^n & 75-75\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$.

Initialisation

Pour $n=0$ $U_0=\begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$

$75+75\times 0{,}2^0=75+75=150$ et $75+75\times 0{,}2^0=75-75=0$

La propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n,

on suppose que : $U_n=\begin{pmatrix} 75+75\times 0{,}2^n & 75-75\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$

et on doit démontrer que : $U_{n+1}=\begin{pmatrix} 75+75\times 0{,}2^{n+1} & 75-75\times 0{,}2^{n+1} \end{pmatrix}$

Or $U_{n+1}=U_n M=\begin{pmatrix} 75+75\times 0{,}2^n & 75-75\times 0{,}2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$U_{n+1}=\begin{pmatrix} 0{,}6(75+75\times 0{,}2^n)+0{,}4(75-75\times 0{,}2^n) & 0{,}4(75+75\times 0{,}2^n)+0{,}6(75-75\times 0{,}2^n) \end{pmatrix}$

$U_{n+1}=\begin{pmatrix} 75+0{,}2\times 75\times 0{,}2^n & 75-0{,}2\times 75\times 0{,}2^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 75+75\times 0{,}2^{n+1} & 75-75\times 0{,}2^{n+1} \end{pmatrix}$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n :

$U_n=\begin{pmatrix} 75+75\times 0{,}2\,n\,75-75\times 0{,}2^n \end{pmatrix}$

3. $0<0{,}2<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^n=0$

Conséquences

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 75$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 75$.

A long terme, les deux programmes auront le même effectif : 75.

Partie B

1.a. $a=3$

$S=c_1+c_3+c-5+3\times(c_2+c_4)$

$111383 \quad c_1=c_2=c_3=1 \quad c_4=3 \quad c_5=8 \quad k=3$

$S=1+1+8+3\times(1+3)=22$

$22\equiv 2\ (10)$ or $k=3$

Le numéro 111383 n'est pas celui d'un enfant inscrit à l'association.

1.b. $08c_3c_4c_5k \quad c_1=0 \quad c_2=8$

$S=0+c_3+c_5+3\times(8+c_4)=c_3+c_5+24+3c_4$

$S\equiv c_3+c_5+4+3c_4\ (10)$

$c_3+c_5+4+3c_4\equiv k\ (10)$

$11c_3c_4c_5k$

$S'=1+c_3+c_5+3\times(1+c_4)$

$S'=1+c_3+c_5+3+3c_4=c_3+c_5+4+3c_4$

donc $S'\equiv S\ (10)$ et $S'\equiv k\ (10)$

L'erreur n'est pas détectée grâce à la clé.

2.b. $c_1c_2c_3c_4c_5k$

$S=c_1+c_3+c_5+a\times(c_2+c_4)=c_1+c_a+c_5+a\times c_2+3\times c_4$

$S\equiv k\ (10)$

$c_1+c_3+c_5+a\times c_2+a\times c_4\equiv k\ (10)$

$c_1c_2c_4c_3c_5k$

$S'=c_1+c_4+c_5+a\times(c_2+c_3)=c_1+c_4+c_5+a\times c_2+a\times c_3$

$S'\equiv k\ (10)\Leftrightarrow \quad S-S'\equiv 0\ (10)$

$S-S'=c_3+a\times c_4-c_4-a\times c_3=c_3-c_4+a\times(c_4-c_3)$

$S-S'=(a-1)(c_4-c_3)$

Donc la clé ne détecte pas l'erreur si et seulement si $(a-1)(c_4-c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

2.b. On peut effectuer un tableau à double entrées en prenant les 10 valeurs possibles de n (de 0 à 9) et les 10 valeurs possibles de p (de 0 à 9) et calculer les 100 valeurs des congruences de np modulo 10.

Cette méthode est difficile à réaliser à l'examen.

Sinon :

$np\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow$ np est divisible par 5 et par 2.

5 et 2 sont des nombres premiers, s'ils divisent le produit $n\times p$ alors ils divisent au moins l'un des facteurs.

1er Cas :

n=0 alors p peut prendre toutes les 10 valeurs de 0 à 9.

2ème Cas :

n=5 alors p est un multiple de 2 : 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.

3ème cas :

n est un multiple 2 distinct de 0 (2 ; 4 ; 6 ; 8) alors p est multiple de 5 : 0 ou 5 .

4ème Cas :

n=1 ou 3 ou 7 u 9 alors p=0.

2.c. On pose n=a-1, on a 1 < a < 9 donc 0 < a-1 < 8. On pose $c_4-c_3\equiv p\ (10)$ avec $0\leqslant p\leqslant 9$

c_4 et c_3 sont distincts donc p est non nul.

Si a-1=1 (a=2) ou a-1=3 (a=4) ou a-1=7 (a=8) alors on détecte l'interversion des chiffres c_3 et c_4 .