Exercice 1 3 points

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

(E) : $z^4+2z^3-z-2=0$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z,

$z^4+2z^3-z-2=(z^2+z-2)(z^2+z+1)$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

CORRECTION

(E) : $z^4+2z^3-z-2=0$
z est un nombre complexe.

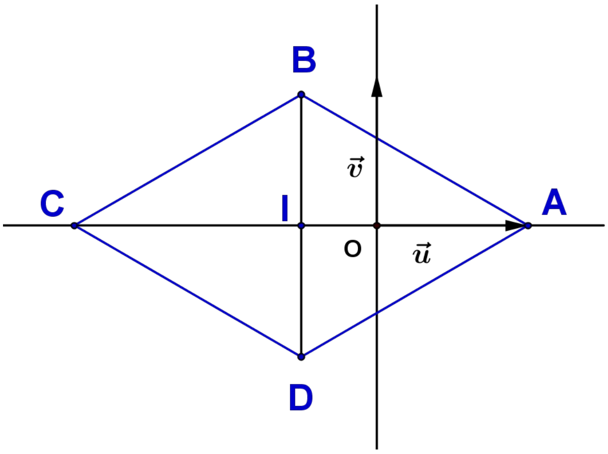
1. On vérifie que : $1^4+2\times1^3-1-2=1+2-1-2=0$, donc **1 est solution entière dr l'équation (E).**

2. Pour tout nombre complexe z,
$(z^2+z-2)(z^2+z+1)=z^4+z^3+z^2+z3+z^2+z-2z^2-2z-2=z^4+2z^3+z-2$

3. $z^4+2z^3-z-2=0 \Leftrightarrow (z^2+z-2)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow (z^2+z-2=0 \text{ ou } z^2+z+1=0)$

- $Z^2+z-2=0 \qquad \Delta=1-4\times(-2)=9$
  $z_1=\frac{-1-3}{2}=-2$ et $z_2=\frac{-1+3}{2}=1$
- $z^2+z+1=0 \qquad \Delta=1+4\times1=-3=(i\sqrt{3})^2$
  L'équation admet deux solutions complexes conjuguées.
  $z_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_4=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (E) admet quatre solutions dans l'ensemble des nombres complexes
  $S=\{-2;1;-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

4. $(O;\vec{u};\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan complexe.
On place A(1) ; $B(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$; C(-2) ; $D\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Le quadrilarère ABCD n'est pas croisé.
Soit le point $I\left(-\frac{1}{2}\right)$, I est le milieu [AC] et [BD] d'autre part [AC] et [BD] sont perpendiculaires.
Donc ABCD est un losange.
<u>Par le calcul</u>
$\vec{AB}\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{AD}\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{BC}\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{DC}\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$AB=AD=BC=DC=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$
Donc ABCD est un losange.