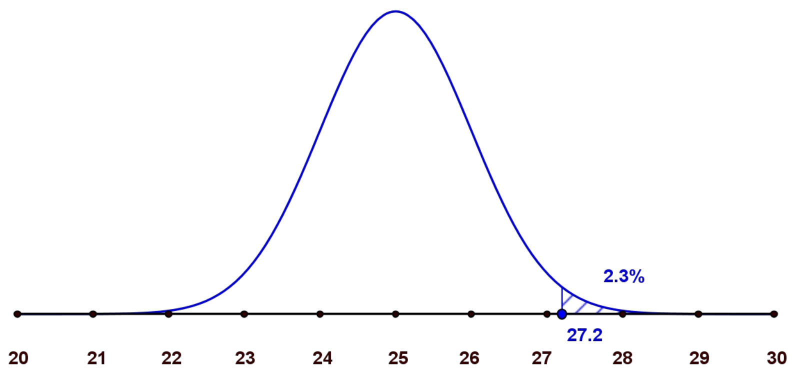
## Exercice 2 4 points

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (µm) et d'écart -type $\sigma_1$ .

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 µm et 27,2 µm.
La fonction de densité de probabilité de X est représenté ci-dessous.
On a pu déterminer que P(X >27,2)=0,023.




**1.a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
**1.b.** Justifier que 1,1 est une valeur approchée de $\sigma_1$ à $10^{-1}$ près.
**1.c.** Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 µm. Arrondir à $10^{-3}$ .

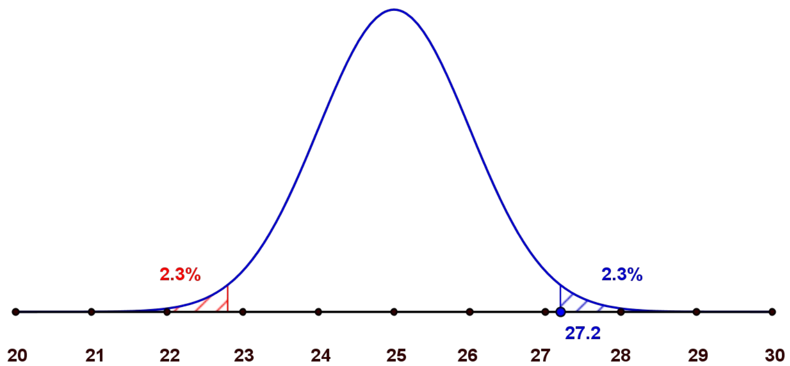
**2.** Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.
La varable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ et d'écart-type $\sigma_2$ .
**2.a.** En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer $\sigma_1$ et $\sigma_2$ .
**2.b.** Un contôle qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes
Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?.

**CORRECTION**

**1.a.** On nous demande de calculer $P(22{,}8 \leqslant X \leq 27{,}2)$.

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ alors pour tout nombre réel b positif, on a : $P(X<\mu-b)=P(\mu+b<X)$.( La courbe représentative de la fonction de densité de probabilité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.

Pour l'exemple, on a : P(27,2<X)=P(25+2,2<X)=0,023, donc P(X<25-2,2)=P(X<22,8)=0,023.




Conséquence

$P(22{,}8 \leqslant X \leqslant 27{,}2)$ =1-P(X<22,8)-P(27,2<X)=1-0,023-0,023= **0,954**.

**1.b.** Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma)=0{,}954$.

Pour l'exemple, $P(25-2{,}2 \leqslant X \leqslant 25+2{,}2)=0{,}954$

Conséquence

$2\sigma=2{,}2$ donc $\sigma$ = **1,1** à $10^{-1}$ près.

**1.c.** On nous demande de calculer :

$$P_{(22{,}8 \leqslant X \leqslant 27{,}2)}(X \leqslant 24)=\frac{P(22{,}8 \leqslant X \leqslant 24)}{P(22{,}8 \leqslant X \leqslant 27{,}2)}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(22{,}8 \leqslant X \leqslant 24)=0{,}1589$

$$P_{(22{,}8 \leqslant X \leqslant 27{,}2)}(X \leqslant 24)=\frac{0{,}1589}{0{,}954}=\mathbf{0{,}167} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

**2.a.** L'énoncé précise : $2\times\sigma_1=2{,}2$ et $P(22{,}8 \leqslant Y \leqslant 27{,}2)=P(25-2{,}2 \leqslant Y \leqslant 25+2{,}2)=0{,}98$

Or $P(25-2\times\sigma_2 \leqslant Y \leqslant 25+2\times\sigma_2)=0{,}954$

Conséquence

$2\times\sigma_2<2{,}2=2\times\sigma_1$ et $\sigma_2<\sigma_1$.

**2.b.** $n=500 \geqslant 30$ ; p=0,98 $np=490 \geqslant 5$ ; 1-p=0,02 $n(1-p)=10 \geqslant 5$.

On détermine l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I=\left[0{,}98-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times0{,}02}{500}};0{,}98+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times0{,}02}{500}}\right]$$

En utilisant la calculatrice : $1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}98\times0{,}02}{500}}=0{,}012$ à $10^{-2}$ près.

$I=[0{,}968;0{,}992]$.

La proportion des pièces conformes dans l'échantillonde 500 pièces est : $f=\frac{485}{500}=\frac{970}{1000}=0{,}97$.

0,97 appartient à I.

Conséquence

**Au risque de 5 % d'erreur, on ne rejette pas l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.**