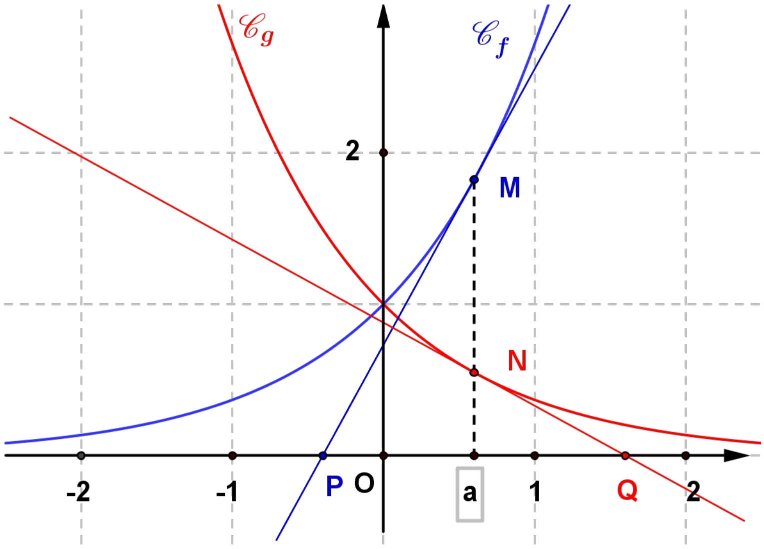
Exercice 3 — 3 points

Soien f et g les fonctions définies sur l'ensemble ℝ des nombres réels par :

$$f(x)=e^{x} \quad \text{et} \quad f(x)=e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.
Pour tout nombre réel a, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et N le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a.
La tangente en M à $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abxcisses en P, la tangente en N à $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en Q.



À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a.

	A	B
1	Abscisse a	longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14	3	2

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la tangente en N à $\mathscr{C}_g$.

2.a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?
2.b. Démontrer cette conjecture.

CORRECTION

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x}$ et $f'(x)=e^{x}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x}$ et $g'(x)=-e^{-x}$.

1. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M(a;e^{a})$ est : e^{a}.

On obtient pour vecteur directeur de cette tangente $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\e^{a}\end{pmatrix}$.

. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point $N(a;e^{-a})$ est : $-e^{-a}$.

On obtient pour vecteur directeur de cette tangente $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-e^{-a}\end{pmatrix}$.

. $\vec{u}.\vec{v}=1\times1+e^{a}\times(-e^{-a})=1-e^{a}\times e^{-a}=1-e^{a-a}=1-e^{0}=0$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

. Conclusion
Les tangentes en M à $\mathscr{C}_f$ et en N à $\mathscr{C}_g$ sont perpendiculaires.

2.a. **En regardant le tableau donné, on conjecture que la longueur PQ est constante et que PQ=2.**

2.b. Équation de la tangente en M à $\mathscr{C}_f$:
$M(a;e^{a})$ $\quad y-e^{a}=e^{a}(x-a)$ donc $y=e^{a}(x-a+1)$
P est le point d'ordonnée 0 de cette droite.
$0=e^{a}(x-a+1)$ Or $e^{a}>0$ donc x-a+1=0 et x=a-1.
$P(a-1;0)$

. Équation de la tangente en N à $\mathscr{C}_g$:
$N(a;e^{-a})$ $\quad y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$ donc $y=-e^{-a}(x-a-1)$
Q est le point d'ordonnée 0 de cette droite
$0=-e^{-a}(x-a-1)$ donc x=a+1
$Q(a+1;0)$

. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ donc **PQ=2.**

