Exercice 4 5 points

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \quad \frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ possède une unique solution sur [1;e] notée α_n .

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre α_n est solution de l'équation (E_n) .

2.a. Sur le graphique sont tracée les droites D_3 , D_4 et D_5 , d'équations respectives $y=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{5}$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .

2.b. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .

2.c. En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer la limite.

3. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que :

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e \leqslant \beta_n .$$

3.a. On admet que la suite (β_n) est croissante.

Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}$.

3.b. En déduire la limite de la suite (β_n) .

ANNEXE
Cette annexe n'est pas à rendre

CORRECTION

Partie A

1. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a pour tout nombre réel x : $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(x)=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=e$

$f'(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1>\ln(x) \quad]\Leftrightarrow\quad e>x$

$f'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\ln(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1<\ln(x) \quad\Leftrightarrow\quad e<x$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

x	0		1		e		$+\infty$
f '(x)							
f(x)		↗	0	↗		↘	

Remarque

$f(1)=0$

2. $f(e)=\dfrac{\ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$ maximum de f.

Partie B

1. $n \geqslant 3 \geqslant e$ **,** la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e}$.

Pour tout entier naturel n supérieur on égal à 3, $\dfrac{1}{n}$ appartient à l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$.

f est continue et strictement croissante sur [1;e], pour tout n surieur ou égal à 3, $\dfrac{1}{n}$ appartient à l'intervalle $[f(1);f(e)]=\left[0:\dfrac{1}{e}\right]$ donc le théorème des valeurs intermédiaires, nous permet d'affirmer que $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent α_n appartenant à [1;e] c'est à dire que l'équation (E_n): $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n appartenant à [1;e].

2. a. En utilisant la courbe donnée en annexe, on remarque que : $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$.

Conjecture

La suite (α_n) est décroissante.

2.b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1})=\dfrac{1}{n+1}$.

On a $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$, la fonctionf étant strictement croissante sur [1;e] donc $\alpha_{n+1}<\alpha_n$ et **la suite (α_n) est décroissante**.

2.c. La suite (α_n) est décroissante et minorée par 1 donc **la suite (α_n) est convergente.**

3.a. On admet que la suite (β_n) est croissante

$f(\beta_n)=\frac{1}{n}=\frac{\ln(\beta_n)}{\beta}$ donc $\ln(\beta_n)=\frac{\beta_n}{n}$ et $f(\beta_3)=\frac{\ln(\beta_3)}{3}$ donc $\ln(\beta_3)=\frac{\beta_3}{3}$.

(β_n) est une suite croissante, donc $\beta_3 \leqslant \beta_n$ et la lonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$ on obtient $\ln(\beta_3)\leqslant \ln(\beta_n)$

<u>Conséquence</u>

$\frac{\beta_3}{3} \leqslant \frac{\beta_n}{n}$ et $n\frac{\beta_3}{3} \leqslant \beta_n$

3.b. $0 < e \leqslant \beta_3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n\beta_3}{3}\right)=+\infty$

<u>Conséquence</u>

$\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n=+\infty$