Exercice 5 Candidats n' ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est munit d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1.a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
1.b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
1.c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$
2.a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2.b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation : 3x+y-2z+3=0 et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation : x-2z+6=0
3.a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation x=2z.
3.b. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
3.c. Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t-3 \\ z = t \end{cases} \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

CORRECTION

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. $A(-1;2;0)$; $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1.a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

Il n'existe pas de nombre réel k telque $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et **les points A, B et C ne sont pas alignés.**

1.b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times0+0\times(-1)+4\times1=4$

1.c. $AB^2=2^2+0^2+4^2=4+16=20$ $\quad AB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$AC^2=0^2+(-1)^2+1^2=1+1=2$ $\quad AC=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$4=2\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC}) \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\widehat{BAC})=\frac{4}{2\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{4}{10}}=\sqrt{0,4}$

En utilisant la calculatrice la calculatrice, on obtient : $\widehat{BAC}$ **= 51° au degré près.**

2.a. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) (par exemples : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=2\times2+0\times(-1)+4\times(-1)=4+0-4=0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\times2+(-1)\times(-1)+1\times(-1)=0+1-1=0$

<u>Conclusion</u>

$\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan (ABC).**

2.b. M(x;y;z) appartient au plan (ABC) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}¿.\vec{n}=(x+1)\times2+(y-2)\times(-1)+z\times(-1)=2x+2-y+2-z=2x-y-z+4$

<u>Conclusion</u>

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : 2x-y-z+4=0.

3.a. Le vecteur $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan d'équation : x-2z+6=0, donc $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$ qui est parallèle au plan d'équation : x-2z+6=0.D'autre part, le plan $\mathscr{P}_2$ passe par le point O.

M(x;y;z) appartient au plan $\mathscr{P}_2$ si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\vec{m}=0$.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad\vec{m}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM}.\vec{m}=x\times1+y\times0+z\times(-2)=x-2z$

<u>Conclusion</u>

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_2$ est : x-2z=0 soit x=2z.

3.b. Les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ normaux respectiveent aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas colinéaires donc **les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants.**

3.c. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants, leur intersection est une droite.

Pour démontrer que cette droite d'intersection est la droite $\mathscr{D}$, il suffit de démontrer que deux points distincts de $\mathscr{D}$ appartiennent à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

$\mathscr{D}$: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t-3 \\ z = t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$

Pour t=0 $E(0;-3;0)$; pour t=1 $F(2;-7;1)$.

$\mathscr{P}_1$: 3x+y-2z+3=0.

Pour le point E : $3\times 0+(-3)-2\times 0+3=-3+3=0$ donc le point E appartient à $\mathscr{P}_1$.

Pour le point F : $3\times 2-7-2\times 1+3=6-9+3=0$ donc F appartient à $\mathscr{P}_1$.

La droite $\mathscr{D}$=(EF) est contenue dans $\mathscr{P}_1$.

$\mathscr{P}_2$: x-2z=0

Pour le point E : $0-2\times 0=0$ donc le point E appartient à $\mathscr{P}_2$.

Pour le point F : $2-2\times 1=2-2=0$ donc le point F apartient à $\mathscr{P}_2$.

La droite $\mathscr{D}$=(EF) est contenue dans $\mathscr{P}_2$.

Conclusion

$\mathscr{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Remarque

Par le calcul, on résout le système :

$$\begin{cases} x+y-2z+3=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-2z+3=0 \\ x-2z=0 \\ z=t \end{cases} \text{ t décrit } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases} \text{ t décrit } \mathbb{R}$$

On obtient une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ (on peut obtenir une autre représentation paramétrique de la droite donnée) .

4. Pour déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC), on résout le système :

$$\begin{cases} 2x-y-z+4=0 \\ x=2t \\ y=-4t-3 \\ z=t \end{cases}$$

On obtient : $2\times(2t)-(-4t-3)-t+4=0 \Leftrightarrow 4t+4t-t+7=0 \Leftrightarrow 7t=-7 \Leftrightarrow t=-1$.

La droite $\mathscr{D}$ es le plan (ABC) sont sécants en I de coordonnées : $x_I=2\times(-1)=-2$; $y_I=-4\times(-1)-3=1$ et $z_I=-1$. **I(-2;1 ;-1) .**