Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite définie par son premier terme $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=2u_n+6$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=9\times 2^n-6$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_n=\frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4.a. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$, $v_{n+1}-2v_n=1$
4.b. En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
4.c. En déduire, pour tout entier $n\geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .

5.a. Vérifier que $n\equiv 1\ (5)$
5.b. En déduire que si n est de la forme 4k+2 avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
5.c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?
Justifier.

CORRECTION

(u_n) est la suite définie par $u_0=3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=2u_n+6$.

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n=9\times 2^n-6$.

Initialisation

Pour n=0, $u_0=3$ et $9\times 2^0-6=9\times 1-6=3$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $u_n=9\times 2^n-6$ et on doit démontrer que $u_{n+1}=9\times 2^{n+1}-6$.

Or $u_{n+1}=2u_n+6=2\times(9\times 2^n-6)+6=9\times 2^{n+1}-12+6=9\times 2^{n+1}-6$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n=9\times 2^n-6$.

2. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a :

$u_n=9\times 2^n-6=9\times 2\times 2^{n-1}-6=6\times 3\times 2^{n-1}-6=6\times(3\times 2^{n-1}-1)$

$n\geqslant 1$ donc (n-1) est un entier naturel donc u_n est divisible par 6.

Pour tout entier nturel $n\geqslant 1$, on a $v_n=\frac{u_n}{6}=3\times 2^{n-1}-1$.

3. On calcule les premiers termes de la suite (v_n) :

$v_1=2$; $v_2=5$; $v_3=11$; $v_4=23$; $v_5=47$ et $v_6=3\times 2^5-1=3\times 32-1=95=5\times 19$

v_6 n'est pas un nombre premier.

Conclusion

L'affirmation est fausse.

Remarque

Si tous les nombres v_n étaient premiers alors on aurait un procédé simple de trouver des nombre premiers aussi grands que l'on veut (de la forme $3\times 2^{n-1}-1$).

Or il est très difficile de trouver des nombres premiers « très grands » qui jouent un rôle important en cryptographie.

Sachant ce résultat, on calcule les premiers termes de la suite jusqu'à obtention d'un nombre non premier.

4.a. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$v_{n+1}=3\times 2^n-1$ et $2\times v_n=3\times 2^n-2$ donc $v_{n+1}-2v_n=1$.

4.b. Théorème de Bezout

Deux entiers naturels non nuls, sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que ax+by=1.

Pour notre exemple :

$a=v_n$; $b=v_{n+1}$; $x=-2$; $y=1$ et $-2v_n+v_{n+1}=1$.

Conclusion

Pour tout entier naturel n non nul, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

4.c. Pour tout entier naturel n non nul, $\text{PGCD}(u_n;u_{n+1})=\text{PGCD}(6v_n;6v_{n+1})=6\,\text{PGCD}(v_n;v_{n+1})=\mathbf{6}$

car v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux donc $\text{PGCD}(v_n;v_{n+1})=1$.

5.a. $2^4=16=3\times 5+1$ donc $2^4\equiv 1\ (5)$.

5.b. n=4k+2 k est un entier naturel

$u_n=9\times 2^n-6=9\times 2^{4k+2}-6=9\times 2^{4k}\times 2^2-6=36\times(2^4)^k-6$

$6\equiv 1\ (5)$ $36\equiv 1\ (5)$ $2^4\equiv 1\ (5)$ $1^k\equiv 1\ (5)$

On obtient : $u_n \equiv 1 \times 1 - 1 \ (5)$ soit $u_n \equiv 0 \ (5)$

Conclusion

si n=4k+2 alors u_n est divisible par 5.

5.c. Pour n=1 $u_1 = 9 \times 2^1 - 6 = 12$ donc u_1 n'est pas divisible par 5.

Remarque

On a démontré que tous les nombres u_n n'étaient pas nécessairement divisible par 5 mais on n'a pas démontre que u_n est divisible par 5 si et seulement s'il existe unentier naturel k telque n=4k+2.

Or on peut facilement démontrer ce résultat.

$u_n = 9 \times 2^n - 6$

$9 \equiv 4 \ (5) \quad 9 \equiv 2^2 \ (5) \quad 9 \times 2^n \equiv 2^2 \times 2^n \ (5) \quad 9 \times 2^n \equiv 2^{n+2} \ (5) \quad -6 \equiv -1 \ (5)$

$u_n \equiv 2^{n+2} - 1 \ (5)$

u_n est divisible par 5 $\Leftrightarrow \quad 2^{n+2} \equiv 1 \ (5)$

On détermine les congruences modulo 5 des puissances de 2.

$2^1 \equiv 2 \ (5) \quad 2^2 \equiv 4 \ (5) \quad 2^3 \equiv 3 \ (5) \quad 2^4 \equiv 1 \ (5)$

Pour tout entier naturel m

$2^{4m} \equiv (2^4)^m \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{4m} \equiv 1 \ (5)$

$2^{4m+1} \equiv 2^{4m} \times 2^1 \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{4m+1} \equiv 2 \ (5)$

$2^{4m+2} \equiv 2^{4m} \times 2^2 \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{4m+2} \equiv 4 \ (5)$

$2^{4m+3} \equiv 2^{4m} \times 2^3 \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{4m+3} \equiv 3 \ (5)$

$2^{n+2} \equiv 1 \ (5) \quad \Leftrightarrow \quad n+2 = 4m$

m n'est pas égal à 0, on pose $m = k+1$ avec k entier naturel.

$n+2 = 4 \times (k+1)$ Soit $n = 4k+4-2 = 4k+2$

Conclusion

u_n est divisible par 5 si et seulement si n=4k+2 avec k entier naturel.