Exercice 1 5 points

Un protocole de traitement d'une maladie, chez un enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $C(t)=\frac{d}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$

où

. C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
. t le temps écoulé depuis le début de la perfusion,exprimée en heure,
. d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
. a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0;+\infty[$ par : $C(t)=12\left(1-e^{-\frac{7}{80}t}\right)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0;+\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{105}{x}\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x}e^{-\frac{3}{40}x}-1$.

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0		$+\infty$
g(x)	0	$\searrow$	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation f(x)=5,9 admet une unique solution sur l'intervalle [1;80].
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de dréterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est à dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairence a d'un patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $C(t)=\frac{d}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$.

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

1.a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

1.b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

CORRECTION

La fonction C est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $C(t)=\frac{d}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$.

t est le temps écoulé, depuis le début de la perfusion, exprimé en heure
a est un réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure
d est le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure

Partie A : étude d'un cas particulier

a=7 et d=84 donc $\frac{d}{a}=\frac{84}{7}=12$.

Pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$: $C(t)=12\left(1-e^{-\frac{7}{80}t}\right)$.

1. $(e^u)'=u'e^u$ donc $\left(e^{-\frac{7}{80}t}\right)'=-\frac{7}{80}e^{-\frac{7}{80}t}$

C est dérivable sur $[0;+\infty[$

$C'(t)=12\left(-\left(-\frac{7}{80}\right)e^{-\frac{7}{80}t}\right)=\frac{84}{80}e^{-\frac{7}{80}t}=\frac{21}{20}e^{-\frac{7}{80}}$

Pour tout t de l'ntervalle $[0;+\infty[$, $e^{-\frac{7}{80}t}>0$ donc $C'(t)>0$.

Conclusion
C est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. $\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{7}{80}t\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim_{t\to+\infty}e^{-\frac{7}{80}t}=0$

Conséquence
$\lim_{t\to+\infty}C(t)=$ **12.**

Conclusion
12<15 donc le traitement de ce patient n'est pas efficace.

Partie B : étude de fonction

1. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{105}{x}\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

$\left(\frac{105}{x}\right)'=-\frac{105}{x^2}$ et $\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)'=\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{10}x}$

On dérive un produit

$f'(x)=-\frac{105}{x^2}\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{165}{x}\times\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}=\frac{105}{x^2}\left(-1+e^{-\frac{3}{10}x}+\frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x}\right)=\frac{105g(x)}{x^2}$

avec $g(x)=\frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x}+e^{-\frac{3}{40}x}-1$

2. Le tableau de variation de g nous permet d'affirmet que g(x) est strictement négatif sur l'ntervalle $]0;+\infty[$.

$f'(x)=\frac{105g(x)}{x^2}$

Conséquence
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(t)<0$ donc **la fonction f est strictement décroissante sur lintervalle** $]0;+\infty[$ **.**

3. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$f(1)=105\left(1-e^{-\frac{3}{40}}\right)=7{,}59$ à 10^{-2} près et $f(80)=\frac{105}{80}(1-e^{-6})=1{,}31$ à 10^{-2} près

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [1;80] or 5,9 appartient à l'intervalle [f(80);f(1)] donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 5,9 admet un unique antécédent α appartenant à l'intervalle [1;80], c'est à dire que l'équation f(x)=5,9 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [1;80].
Si $0<x<1$ alors $f(x)>f(1)=7{,}59$ à 10^{-2} près donc l'équation f(x)=5,9 n'admet pas de solution appartenant à l'intervalle]0;1[.
Si $80<x$ alors $f(80)>f(x)$ or $f(80)=1{,}31$ à 10^{-2} près donc l'équation f(x)=5,9 n'admet pas de solution appartenant à l'intervalle $]80;+\infty[$.
Conclusion
L'équation f(x)=5,9 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
En utilisant la calculatrice :

$f(8)=\frac{105}{8}\left(1-e^{-\frac{3}{5}}\right)=5{,}92$ à 10^{-2} près et $f(9)=\frac{105}{9}\left(1-e^{-\frac{27}{40}}\right)=5{,}73$ à 10^{-2} près

donc $8<\alpha<9$

$f(8{,}1)=\frac{108}{8{,}1}\left(1-e^{-\frac{3\times 8{,}1}{40}}\right)=5{,}902$ à 10^{-3} près et $f(8{,}2)=\frac{105}{8{,}2}\left(1-e^{-\frac{3\times 8{,}2}{40}}\right)=5{,}88$ à 10^{-2} près.

Donc $8{,}1<\alpha<8{,}2$

Conclusion
8,1 est une valeur approchée de α au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1.a. Pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0;+\infty[$, $C(t)=\frac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$

1.b. Pour t=6 $C(6)=\frac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{3a}{40}}\right)=f(a)$

f(a) = 5,9 $\Leftrightarrow$ **a = 8,1**

2. $C(t)=\frac{d}{8{,}1}\left(1-e^{-\frac{8{,}1}{80}t}\right)$, on a : $\lim_{t\to+\infty} C(t)=\frac{d}{8{,}1}$

Le taitement est efficace si et seulement si le plateau est égal à 15 donc :

$\frac{d}{8{,}1}=15 \quad\Leftrightarrow\quad d=15\times 9{,}1=121{,}5$

Conclusion
Le traitement est efficace si le débit est égal à 121,5 micromoles par litre.