

Exercice 2

3 points

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4} \right) u_n.$$

On définit la suite (v_n) par pour tout entier naturel n : $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul ci-dessous présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) , arrondies au centmillième.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1.00000	1.00000
3	1	0.25000	0.50000
4	2	0.08333	0.25000
5	3	0.03125	0.12500
6	4	0.01250	0.06250
7	5	0.00521	0.03125
8	6	0.00223	0.01563
9	7	0.00098	0.00781
10	8	0.00043	0.00391
11	9	0.00020	0.00195

Quelle formule, étirée vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2.a. Conjecturer l'expression de (v_n) en fonction de n .

2.b. Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

CORRECTION

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n$.

1. On écrit dans la cellule B3 :

$$=((A2+1)/(2*A2+4))*B2$$

2.a. En regardant la feuille de calcul, on conjecture, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{2^n}$.

2.b. On veut démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

$v_0 = \frac{1}{2^0} = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = (n+2)u_{n+1} = (n+2) \times \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n = \frac{1}{2} \times (n+1)u_n = \frac{1}{2}v_n$$

donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Conséquence

Pour tout entier naturel n , on a : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

$$3. v_n = (n+1)u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{n+1} \times v_n.$$

$$0 \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$