Exercice 3 4 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte et correctement justifiée
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparaît avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance et on obtient 6.

Affirmation 1 : La probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Dans le plan complexes, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = 2e^{-\frac{\pi}{3}}$ et $z_N = \frac{3-i}{2+i}$.

Affirmation 2 : La droite (MN) est parallè à l'axe des ordonnées.

Dans les questions 3. et 4., on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3+2t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

3. On considère les points A, B et C avec A(-2;2;3), B(0;1;2) et C(4,2,0).
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).

4. On considère la droite Δ passant par le point D(1;4;1) et de vrcteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

Affirmation 4 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

CORRECTION

1. **Affirmation 1 :** Affirmaton Fausse

Justification

On note :

T l'événement : « le dé choisi est truqué »

$\bar{T}$ l'événement : « le dé choisi n'est pas truqué »

Les deux dés sont d'aspects identuques donc $P(T)=P(\bar{T})=\frac{1}{2}$.

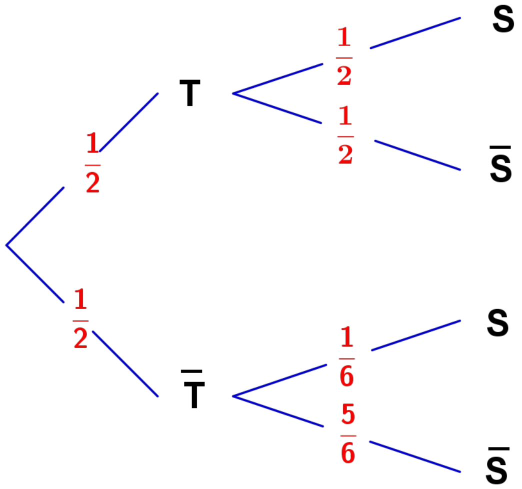
S l'événement : « on obtient 6 avec le dé choisi »

$\bar{S}$ l'événement : « on n'obtient pas 6 avec le dé choisi »

$P_T(S)=\frac{1}{2}$ donc $P_T(\bar{S})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P_{\bar{T}}(S)=\frac{1}{6}$ donc $P_{\bar{T}}(\bar{S})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

On obtient l'arbre de probabilités suivant :



En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(S)=P(S\cap T)+P(S\cap\bar{T})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

On nous demande de calculer $P_S(T)$

$P_S(T)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}\neq\frac{2}{3}$ donc **l'affirmation 1 est fausse.**

2. **Affirmation 2 :** Affirmation VRAIE

Justification

(MN) est parallèle à l' axe des ordonnées si et seulement si les affixes de M et N ont la même partie réelle.

$z_M=2e^{-i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$

$z_N=\frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-5i-1}{4+1}=1-i$

(MN) est la droite d'équation $x=1$ donc **l'affirmation 2 est vraie.**

3. **Affirmation 3 :** Affirmation VRAIE

Justification

d est la droite passant par le point $E(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

d est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) par exemples $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
A(-2;2;3), B((0;1;2) et C(4;2;0)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ (on remarque que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=2\times1+(-1)\times0+(-1)\times2=2-2=0$
$\overrightarrow{AC}.\vec{u}=6\times1+0\times0+(-3)\times2=6-6=0$
d est orthogonaleau plan (ABC) donc **l'affirmation 3 est vraie.**

4. Affirmation 4 : **Affirmation FAUSSE**

justification

Δ est la droite passant par D(1;4;1) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ or $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et Δ ne sont pas parallèles.
Pour déterminer si les droites d et Δ Sont sécantes ou sont non coplanaires, ondétermine une représentation paramétrique de Δ $\begin{cases}x=4-1+2k\\ y=4+k\\ z=1+3k\end{cases}$ k décrit $\mathbb{R}$

On détermine alors l'intersection des droites d et Δ.

$$\begin{cases}1+t=1+2k\\ 2=4+k\\ 3+2t=1+3k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2k\\ k=-2\\ 2t=3k-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-4\\ k=-2\\ t=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-4\\ k=-2\end{cases}$$

donc d et Δ sont sécantes au point F(-3;2 ;-5) et **l'affirmation 4 est fausse.**