

Exercice 4

3 points

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Partie A : valeur exacte de I

1. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.
2. Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de J

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a donc $J = \int_0^1 g(x) dx$.

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

On choisit au hasard un point $M(x;y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0;1]$.

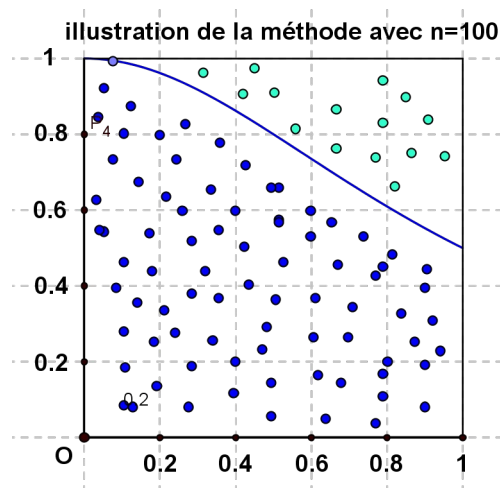
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe C_g est égale à l'intégrale J.

En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe n entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- On choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y selon la loi uniforme sur $[0;1]$
- Si $M(x;y)$ est au-dessous de la courbe C_g on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \frac{c}{n}$ est une valeur approchée de J.

C'est le principe de Monte-Carlo.



La figure ci-dessus illustre la méthode présentée pour $n=100$.

100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.

Les points bleus correspondent aux points sous la courbe, les points verts aux points situés au-dessus de la courbe.

Le rapport du nombre de points bleus par le nombre total de points donne une estimation de l'aire sous la courbe.

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables : n, c, f, i, x, y sont des nombres
Traitement : Lire la valeur de n
c prend la valeur
Pour i allant de 1 à faire
 x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
 y prend
 Si alors
 prend la valeur
 Fin Si
Fin Pour
f prend la valeur
Sortie : Afficher f

2. Pour $n = 1000$ l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % de la valeur exacte de f.

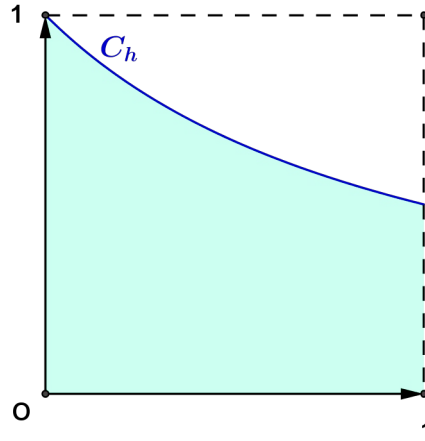
3. Quelle doit être au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 ?

CORRECTION

Partie : valeur exacte de l'intégrale I

1. Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par : $h(x) = \frac{1}{1+x}$

h est continue et positive sur $[0;1]$ donc $I = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$



Remarques

Le repère est orthormé.

L'unité d'aire est l'aire du carré de côté 1.

La partie de plan considérée est colorée en vert.

2. $u(x)=1+x$, $u'(x)=1$, $\frac{1}{1+x} = \frac{u'(x)}{u(x)} = h(x)$

La fonction H définie sur $[0;1]$ par $H(x) = \ln(1+x)$, est une primitive de h .

$$I = H(1) - H(0) = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln(2).$$

Partie B : estimation de la valeur de J

1.

Variables : n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement : Lire la valeur de n

c prend la valeur 0

Pour i allant de 1 à n faire

x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1

y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1

Si $y \leq \frac{1}{1+x^2}$ alors

c prend la valeur $c+1$

Fin Si

Fin Pour

f prend la valeur $\frac{c}{n}$

Sortie : Afficher f

2. Pour $n = 1000$

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % de la valeur exacte de J est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,781 - \frac{1}{\sqrt{1000}}; 0,781 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] = [0,781 - 0,032; 0,781 + 0,032]$$

$$I = [0,749; 0,813]$$

3. L'amplitude d'un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est égal à $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \Leftrightarrow \frac{2}{0,02} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 100 \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 100^2 \leq n \Leftrightarrow 10000 \leq n$$

Conclusion

La valeur minimale de n, pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02 est 10000.