Exercice 5 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points**Question préliminaire**

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour réel a positif, on a : $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = e^{-\lambda a}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près.

Partie A : étude d'un exemple

1. Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.
2. Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes, affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 jours est de 94 %.

Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.

On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.

Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.

Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 5 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.

On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après un an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. Calculer $P(X > 445)$ la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.
2. Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes. Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 %?

CORRECTION

Question préliminaire

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

La fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(t) = -e^{-\lambda t}$ est une primitive de f .

$$P(T \leq a) = \int_0^a f(t) dt = F(a) - F(0) = -e^{-\lambda a} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a}$$

Les événements $(T \leq a)$ et $(T > a)$ sont deux événements contraires donc :

$$P(T > a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - 1 + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a}$$

Partie A : étude d'un exemple

1. $P(180 < T) = e^{-180\lambda} = e^{-\frac{180}{2800}}$

En utilisant la calculatrice

$P(180 < T) = 0,938$ à 10^{-3} près.

2. On nous demande de calculer $P_{(180 < T)}(180 + 180 < T)$.

La loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement donc la probabilité demandé est :

$P(180 < T) = 0,938$.

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 jours est de 94 %, c'est à dire que si on choisit au hasard une lampe dans la production, la probabilité qu'elle ait une durée de vie supérieure à 180 jours est : $p = 0,94$.

Le laboratoire choisit au hasard et de manière indépendante un échantillon de 400 lampes.

$$n = 400 \geq 30, \quad np = 400 \times 0,94 = 376 \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) = 400 \times 0,06 = 24 \geq 5$$

On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,94 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{400}}; 0,94 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{400}} \right]$$

En utilisant la calculatrice :

$$1,96 \times \sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{400}} = 0,023 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$I = [0,917; 0,963]$$

La proportion de lampes ayant une durée de vie supérieure à 180 jours dans l'échantillon est :

$$f = \frac{400 - 32}{400} = 0,92$$

0,92 appartient à l'intervalle I.

Conclusion

On ne remet pas en cause, la proportion annoncée par le fabricant au seuil de 95 %.

Partie C : dans la salle de spectacle

X suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1. En utilisant la calculatrice, on obtient **$P(445 < X) = 0,247$ à 10^{-3} près.**

2. En utilisant la calculatrice, on détermine n tel que $P(n \leq X) = 0,95$, on obtient $n = 428$ à 10^{-2} près.

La taille minimale du stock doit être de $500 - 428 = 72$ lampes.