Exercice 5 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Un bit est un symbole informatique élémentaire valant soit 0, soit 1.

Partie A : ligne de transmission

Une ligne de transmission transporte des bits de données selon de modèle suivant :
. elle transmet le bit de façon correcte avec une probabilité p ;
. elle transmet le bit de façon erronée (en changeant le 1 en 0 ou le 0 en 1) avec une probabilité 1- p.
On assemble bout à bout plusieurs lignes de ce type, et on suppose qu'elles introduisent des erreurs de façon indépendante les unes des autres .
On étudie la transmission d'un seul bit, ayant pour valeur 1 au début de la transmission.
Après avoir traversé n lignes de transmission, on note :
. p_n la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 1 ;
. q_n la probabilité que le bit reçu ait la valeur 0.
On a donc $p_0=1$ et $q_0=0$.
On définit les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \quad X_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $X_{n+1}=AX_n$ et donc $X_n=A^nX_0$

1.a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

1.b. On pose : $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$. Vérifier que : $A=PDP^{-1}$.

1.c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n=PD^nP^{-1}$

1.d.

1	X0:=[[1],[0]]
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ M
2	P:=[[1,1],[1,-1]]
	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ M
3	D:=[[1,0],[0,2*p-1]]
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2*p-1 \end{pmatrix}$ M
4	P*(D^n)*Pç(-1)*X0
	$\begin{pmatrix} \frac{(2*p)-1)^n+1}{2} \\ \frac{-(2*p-1)^n+1}{2} \end{pmatrix}$ M

En vous appuyant sur la copie décran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessus, déterminer l'expression de q_n en fonction de n.

2. On suppose dans cette question que p vaut 0,98. On rappelle que le bit avant transmission a pour valeur 1. On souhaite que la probabilité que le bit reçu ait pour valeur 0 soit inférieure ou égale à 0,25. Combien peut-on, au maximum, aligner de telles lignes de transmission.

Partie B : étude d'un code correcteur, le code Hamming(7,4)

On rappelle qu'un **bit** est un symbole élémentaire valant soit 0, soit 1.
On considère un « mot » formé de 4 bits que l'on note b_1, b_2, b_3 et b_4.
Par exemple,, pour le mot « 1101 », on a $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=0$ et $b_4=1$.
On ajoute à cette liste une *clé de contrôle* $c_1c_2c_3$ *f*ormée de 3 bits ;
. c_1 est le reste de la division euclidienne de $b_2+b_3+b_4$ par 2 ;
. c_2 est le reste de la division euclidienne de $b_1+b_3+b_4$ par 2 ;
. c_3 est le reste de la division euclidienne de $b_1+b_2+b_4$ par 2.
On appelle alors « message » la suite de 7 bits formée des 4 bits du mot et des 3 bits de contrôle.

1. Préliminaires
1.a. Justifier que c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.
1.b. Calculer la clé de contrôle associée au mot 1001.

2. Soit $b_1b_2b_3b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.
Démontrer que si l'on change la valeur de b_1 et que l'on recalcule la clé, alors :
. la valeur de c_1 est inchangée :
. la valeur de c_2 est modifiée ;
. la valeur de c_3 est modifiée.

3. On suppose que, durant la transmission du message, au plus un des 7 bits a été transmis de façon erronée.
À partir des quatre premiers bits du message reçu, on recalcule les 3 bits de contrôle, et on les compare, on recalcule les trois bits de contrôle, et on compare avec les bits de contrôle reçus.
Sans justification,recopier et compléter le tableau ci-dessous. La lettre F signifie que le bit de contrôle reçu ne correspond pas au bit de contrôle calculé et I que ces deux bits sont égaux.

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	aucun
c_1	I							
c_2	F							
c_3	F							

4. Justifier rapidement, en vous appuyant sur le tableau, que si un seul bit reçu est erroné, on peut dans tous lescas déterminer lequel, et corriger l'erreur.

5. Voici deux messages de 7 bits :
A = 0100010 et B = 1101001.
On admet que chacun d'eux comporte au plus une erreur, et la corriger le cas échéant.

CORRECTION

1.a. Pour démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}, on peut utiliser la calculatrice.

Ou on détermine $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & c \end{pmatrix}$ tel que $MP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$.

$MP=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & a-c \\ b+d & b-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

On doit résoudre les deux systèmes suivants :

$\begin{cases} a+c=1 \\ a-c=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b+d=0 \\ b-d=1 \end{cases}$

On obtient :

. a=c et 2a=1 donc $a=\frac{1}{2}=0,5$ et $c=\frac{1}{2}=0,5$

. b+d=0 et 2b=1 donc $b=\frac{1}{2}=0,5$ et $d=-\frac{1}{2}=-0,5$.

Donc $M=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ et on peut vérifier que PM=I

Conclusion

P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$

1.b. $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$ $PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & -2p+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,5+p-0,5 & 0,5-p+0,5 \\ 0,5-p+0,5 & -0,5+p+0,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$PDP^{-1}=A$

1.c. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entir naturel non nul, on a : $A^n=PD^nP^{-1}$.

Initialisation

Pour n=1, $A^1=A$ et $PD^1P^{-1}=PDP^{-1}$.

On vient de démontrer dans la questioon précédente que $A=PDP^{-1}$ donc la propriété est vérifiée pour n=1.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que : $A^n=PD^nP^{-1}$ et on doit démontrer que $A^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$.

Or $A^{n+1}=A^nA=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^nIDP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, on a $A^n=PD^nP^{-1}$

1.d. La copie d'écran nous donne le calcul de $PD^nP^{-1}X_0$.

Or $PD^nP^{-1}=A^n$ et $A^nX_0=X_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

donc $X_n=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(2p-1)^n+1}{2} \\ \frac{-(2p-1)^n+1}{2} \end{pmatrix}$ et $q_n=\frac{-(2p-1)^n+1}{2}$

2. $p_0=1$ et $q_0=0$ donc $X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel non nul n, $q_n=\frac{-(2p-1)^n+1}{2}$.

On suppose que p=0,98 donc 2p-1=0,96 et $q_n=\frac{-0,96^n+1}{2}$.

On veut déterminer le plus grand entier naturel n tel que q_n soit inférieur ou égal à 0,25.

$q_n \leqslant 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}96^n+1 \leqslant 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5 \leqslant 0{,}96^n$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5) \leqslant \ln(0{,}96^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}5) \leqslant n \times \ln(0{,}96)$

$0<0{,}96<1$ donc $\ln(0{,}96)<0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}96)} \geqslant n$ on a $\dfrac{\ln(0{,}8)}{\ln(0{,}96)} = 16{,}98$ à 10^{-2} près.

Le plus grand entier naturel n tel que $q_n \leqslant 0{,}25$ est 16.

Conclusion

On peut aligner au maximum 16 lignes de transmission.

Partie B : étude d'un code correcteur, le code Hamming(7,4)

1. Préliminaires

1.a. c_1, c_2 et c_3 **sont des restes de divisions euclidiennes paar 2 donc ces nombres sont égaux à 0 ou 1.**

1.b. On considère le mot : 1001

$b_1=1$; $b_2=b_3=0$; $b_4=1$

$b_2+b_3+b_4=0+0+1=1$ donc $c_1=1$

$b_1+b_3+b_4=1+0+1=2$ $2\equiv 0\ (2)$ donc $c_2=0$

$b_1+b_2+b_4=1+0+1=2$ $2\equiv 0\ (2)$ donc $c_3=0$.

La clé de contrôle associée au mot 1001 est 100.

2. Remarque

Pour tout nombre entier a :

$2a\equiv 0\ (2)$ donc $a+a\equiv 0\ (2)$ soit $a\equiv -a\ (2)$

Si on change la valeur de b_1 en b_1' alors on a $b_1+b_1'=1$ (l'un des deux nombres a pour valeur 1 l'autre pour valeur 0).

$b_1+b_1'\equiv 1\ (2)$ et $b_1'\equiv -b_1+1\ (2)$ soit $b_1'\equiv b_1+1\ (2)$

. La valeur de b_1 n'intervient pas dans le calcul de c_1 .

La valeur de c_1 est inchangée.

. $b_1'+b_3+b_4\equiv b_1+1+b_3+b_4\ (2)$ donc $b_1+b_3+b_4\equiv c_2+1\ (2)$

La valeur de c_2 est modifiée.

. De même $b_1'+b_2+b_4\equiv c_3+1\ (2)$

La valeur de c_3 est modifiée.

3. On complète le tableau

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	aucun
c_1	I	F	F	F	F	I	I	I
c_2	F	I	F	F	I	F	I	I
c_3	F	F	I	F	I	I	F	I

4. On remarque que les 8 colonnes correspondant à b_1; b_2; b_3; b_4; c_1; c_2; c_3 et aucun sont distinctes deux à deux.

Il n'existe pas d' autre possibilité pour des colonnes de trois éléments contenant les symboles I et F.

Conséquence

Si on obtient la colonne $\begin{pmatrix} I \\ I \\ I \end{pmatrix}$ aucun bit n'est erroné et si on obtient une autre colonne alors un bit et un seul est erroné et on peut le déterminer.

5. A = 0100010

$b_1=0$; $b_2=1$; $b_3=b_4=0$ et $c_1=0$; $c_2=1$; $c_3=0$

$b_2+b_3+b_4=1$ et $c_1=0$

La valeur de c_1 ne correspond pas à la valeur du bit de contrôle reçu

Le premier terme de la colonne est: F.

$b_1+b_3+b_4=0$ et $c_2=1$

La valeur de c_2 ne correspond pas à la valeur du bit de contrôle reçu

Le deuxième terme de la colonne est : F.

$b_1+b_2+b_4=1$ et $c_3=0$

La valeur de c_3 ne correspond pas à la valeur du bit de contrôle reçu.

Le troisième terme de la colonne est ; F.

On obtient la colonne $\begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix}$ donc le bit erroné est b_4 .

Le message corrigé est : 0101010.

B = 1101001

$b_1=b_2=1$; $b_3=0$; $b_4=1$; $c_1=c_2=0$; $c_3=1$

$b_2+b_3+b_{41}+0+1=2 \quad 2\equiv 0\ (2)$ et $c_1=0$

La valeur de c_1 correspond à la valeur du bit de contrôle reçu.

Le premier terme de la colonne est : I.

$b1+b_3+b_4=1+0+1=2 \quad 2\equiv 0\ (2)$ et $c_2=0$

La valeur de c_2 correspond à la valeur du bit de contrôle reçu.

Le deuxième terme de la colonne est : I.

$b_1+b_2+b_4=1+1+1=3 \quad 3\equiv 1\ (2)$ et $c_3=1$

La valeur de c_3 correspond à la valeur du bit de contrôle reçu.

Le troisième terme de la la colonne est : I.

On obtient la colonne $\begin{pmatrix} I \\ I \\ I \end{pmatrix}$ donc aucun bit n'est erroné.

Le message reçu 1101001 est correct.