## Exercice 1 5 points

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).*
*Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.*
*Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.*

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons conditionnés en sachets.
On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu=175$ . De plus, une observation a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X\leqslant 170)=0{,}02$ .

**Question 1 :** Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'événement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

**Réponse a :** 0,04 **Réponse b :** 0,96
**Réponse c :** 0,98 **Réponse d :** On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon préféré aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

**Question 2 :** Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

**Réponse a :** 0,72 **Réponse b :** 0,28
**Réponse c :** 0,54 **Réponse d :** On ne peut pas répondre car il manque des données.

La machine A produit un tiers des bonbons à l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B, lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélévé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.
Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

**Question 3 :** Quelle la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

**Réponse A :** 0,02 **Réponse b ;** 0,67
**Réponse c :** 0,44 **Réponse d :** 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

**Question 4 :** Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

**Réponse a :** 0,45 **Réponse b :** 1
**Réponse c :** 0,55 **Réponse d :** On ne peut pas répondre car il manque des données.

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 % **,** avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients

**Question 5 :** Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

**Réponse a :** 40 **Réponse b :** 400
**Réponse c :** 1600 **Réponse d :** 20

**CORRECTION**

**Question 1 :** **Réponse : b** **0,96**

*Justification non demandée*

X suit une normale d'espérance $\mu=175$ , donc pour tout nombre réel positif a : $P(X\leqslant 175-a)=P(X\geqslant 175+a)$ .
Pour a=5 : $P(X\leqslant 170)=P(X\geqslant 180)$ , or l'énoncé précise que $P(X\leqslant 170)=0{,}02$ .
$P(170\leqslant X\leqslant 180)=1-P(X\leqslant 170)-P(X\geqslant 180)1-0{,}02-0{,}02=0{,}96$

**Question 2 :** **Réponse : a** **0,72**

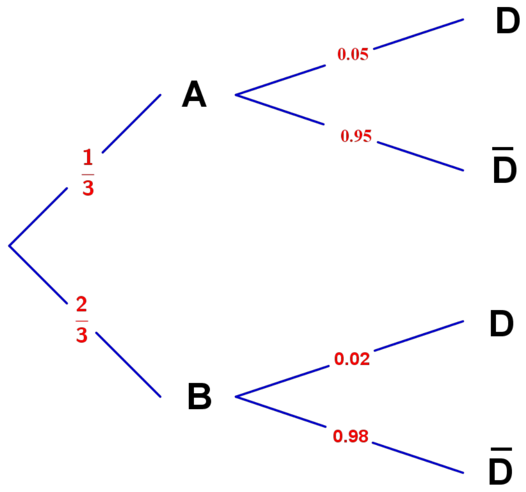
*Justification non demandée*

La production journalière de bonbons étant importante, on peut supposer que le choix aléatoire d'un échantillon de 50 bonbons correspond à 50 tirages avec remise (donc des tirages indépendants).
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante, on tire au hasard un bonbon de la production journalière :
Succès $S$ est l'événement : « le bonbon est déformé », la probabilité de succès est $p=0{,}05$ .
Echec $\bar{S}$ est l'événement : « le bonbon n'est pas déformé », la probabilité de l'échec est $q=1-0{,}05=0{,}095$ .
On effectue 50 tirages indépendants et la loi de probabilité de la variable aléatoire Z égale au nombre de succès en 50 épreuves est la loi binomiale de paramètre n=50 et p=0,05.
On veut déterminer la probabilité qu'au moins deux bonbons soient déformés.
$P(Z\geqslant 2)=1-P(Z=0)-P(Z=1)$
$P(Z=0)=0{,}95^{50}=0{,}077$ à $10^{-3}$ près $P(Z=1)=50\times 0{,}05\times 0{,}95^{49}=0{,}202$ à $10^{-3}$ près
$P(Z\geqslant 2)1-0{,}279=0{,}721$ $P(Z\geqslant 2)=0{,}72$ à $10^{-2}$ près.

**Question 3 :** **Réponse : c** **0,44**

*Justification non demandée*

On prélève un bonbon au hasard de la production journalière.
On note :
A l'événement : « le bonbon est produit par la machine A ».
B l'événement : « le bonbon est produit par la machine B ». $(B=\bar{A})$
D l'événement : « le bonbon est déformé ».
L'énoncé précise : $P(A)=\frac{1}{3}$ ; $P(B)=\frac{2}{3}$ ; $P_A(D)=0{,}05$ et $P_B(D)=0{,}02$ donc $P_A(\bar{D})=0{,}95$ ; $P_B(\bar{D})=0{,}98$ .
On construire l'arbre de probabilités suivant :




On nous demande de calculer : $P_D(B)=\dfrac{P(D\cap B)}{P(D)}$ .
En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)=\frac{1}{3}\times 0{,}05+\frac{2}{3}\times 0{,}02=\frac{5}{300}+\frac{4}{300}=\frac{9}{300}$

$P(D \cap B) = \frac{2}{3} \times 0{,}02 = \frac{4}{300}$

$P_D(B) = \frac{4}{300} \times \frac{300}{9} = \frac{4}{9} = 0{,}44$ à $10^{-2}$ près.

**Question 4 :** **Réponse : a** **0,45**

*Justification non demandée*

La fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ son espérance est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Donc $\frac{1}{\lambda} = 500 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{500} = 0{,}002$

Pour tout nombre réel t appartenant à $[0;+\infty[$ $f(t) = 0{,}002 e^{-0{,}002 t}$

$$P(Y \leqslant 300) = \int_0^{300} f(t)\, dt = F(300) - F(0)$$

$F(t) = -e^{-0{,}002 t}$ F est une primitive de $f$ sur $[0;+\infty[$.

$P(Y \leqslant 300) = -e^{-0{,}6} + 1 = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$ à $10^{-2}$ près.

**Question 5 :** **Réponse : c** **1600**

*Justification non demandée*

Soit n le nombre de clients interrogés et $f$ la proportion de personnes de plus de 20 ans obtenue dans l'échantillon de n personnes.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % est $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donc l'amplitude de l'intervalle est : $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On veut : $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{2}{0{,}05} \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 40 \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 1600 \leqslant n$

(car la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ ).