Exercice 2 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques.

$d_1 : \begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$ $\qquad d_2 : \begin{cases} x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \end{cases}$ t' décrit $\mathbb{R}$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale de ces droites.

1. Vérifier que le point $A(2;3;0)$ appartient à la droite d_1.

2. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de la droite d_1 et vecteur directeur $\vec{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersectionde la droite d_2 et du plan P.

4.a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan Pest : $5x+4y-z-22=0$

4.b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3;3;5)$.

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par le point $B(3;3;5)$.

5.a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

5.b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes? Justifier la réponse.

5.c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

CORRECTION

1. $\begin{cases} 2=2+t \\ 3=3-t \\ 0=t \end{cases} \Leftrightarrow \{t=0$ donc le point $A(2;3;0)$ appartient à la droite d_1.

2. $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1 $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.

Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Remarque :

On admet que les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires donc elles ne sont pas parallèles.

3. $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}.\vec{u_1}=1\times1+(-2)\times(-1)+(-3)\times1=1+2-3=0$

$\vec{v}.\vec{u_2}=1\times2+(-2)\times1+(-3)\times0=2-2+0=0$

donc $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

4.a. On détermine un vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$.

$\vec{w}.\vec{u_1}=a-b+c=0$

$\vec{w}.\vec{v}=a-2b-3c=0$

$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a-2b-3c=0 \end{cases}$ on obtient $-b-4c=0$ soit $b=-4c$

Si on choisit $c=1$ ($\vec{w}$ est un vecteur non nul) alors $b=-4$ et $a=-5$ donc $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le point $M(x;y;z)$ appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{w}=0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-0 \end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\vec{w}=(x-2)\times(-5)+(y-3)\times(-4)+(z-0)\times1=-5x-4y+z+10+12=-5x-4y+z+22$

P : -5x-4y+z+22=0 soit **P : 5x+4y-z-22=0**

4.b. Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de P et d_2, on résout le système :

$\begin{cases} 5x+4y-z-22=0 \\ x=-5+2t' \\ y=-1+t' \\ z=5 \end{cases}$ on obtient :

$5(-5+2t')+4(-1+t')-5-22=0 \Leftrightarrow 10t'+4t'-25-4-5-22=0 \Leftrightarrow 14t'=56$

$\Leftrightarrow t'=\frac{56}{14}=4$

$\begin{cases} x=-5-2\times4=3 \\ y=-1+4=3 \\ z=5 \end{cases}$ **B(3;3;5)**

5.a. Δ est la droite passant par B(3;3;5) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, Δ : $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases}$ λ décrit $\mathbb{R}$.

5.b. La droite Δ est contenue dans le plann P car B esun point de P et $\vec{v}$ est un des deux vecteurs qui dirigent le plan P.

$\vec{u_1}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux donc d_1 et Δ sont orthogonales.

Deux droites orthogonales contenues dans un même plan sont perpendiculaires dond sécantes.

<u>Remarque</u>

On peut calculer les coordonnées du point C d'intersection de d_1 et Δ, pour cela on résout le système :

$$\begin{cases} 2+t=3+\lambda \\ 3-t=3-2\lambda \\ t=5-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-\lambda=1 \\ t-2\lambda=0 \\ t+3\lambda=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ t=2 \end{cases} \text{ on obtient } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \quad C(4;1;2)$$

5.c. Δ et d_2 sont orthogonales et passent par B, elles perpendiculaires (donc sécantes en B).

<u>Conclusion</u>

Δ **est la perpendiculaire commune à** d_1 **et** d_2 **.**