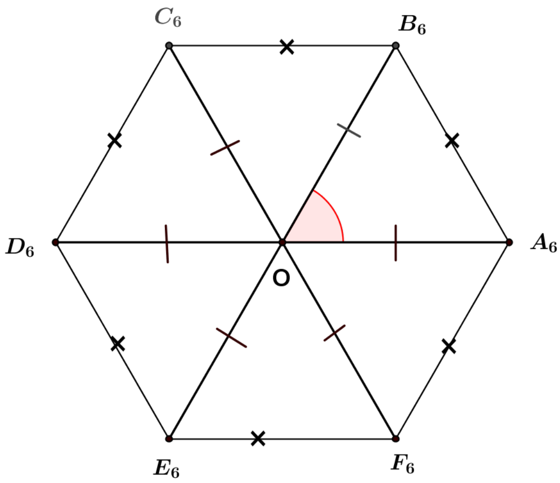
Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1.
On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$, la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier n=6

On représenté ci-dessous un polygone P_6.



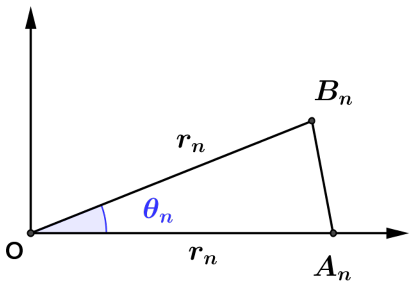
1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

2. Exprimer en fonction de r_n la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3. En déduire que $r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

Dans cette partie , on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.



1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égal à 1.
Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OB_n})$, puis démontrer que :
$$r_n=\sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;\pi[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sin(x)}$.

Alors le nombre r_n défini dans la partie B pour $n\geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :
$$r_n=\sqrt{\frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$
On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;\pi[$.

1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour commencer par démontrer que pour tout $n\geqslant 4$ on a : $0<\frac{2\pi}{n+1}<\frac{2\pi}{n}<\pi$.

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : n est un enombre entier
Traitement : n prend la valeur 4
Tant que $\sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}>0{,}58$ faire
    n prend la valeur n+1
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

Quelle valeur de n va afficher en sortie cet algorithme ?

CORRECTION

Partie A : étude de cas particulier n=6

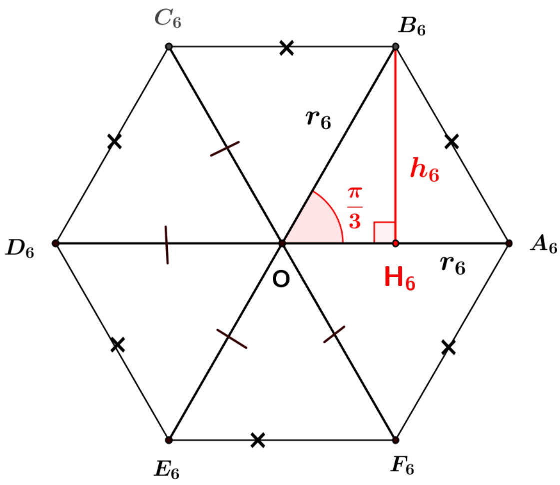
1. Les 6 triangles isocèles, de sommet principal 0, sont superposables donc une mesure de l'angle $\widehat{A_6OB_6}$ est égal à $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Le triangle OA_6B_6 est un triangle isocèle ayant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ c'est donc un triangle équilatéral.

. Les 6 triangles sont équilatéraux et superposables, ils ont tous la même aire.

Or le polygone P_6 est égal à 1, donc l'aire du triangle OA_6B_6 est $\frac{1}{6}$.

2. Soit H_6 le pied de la hauteur du triangle OA_6B_6 issue de B_6 donc le triangle B_6OH_6 est rectangle en H_6



$\sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

On note $h_6=B_6H_6$

$\sin(\widehat{H_6OB_6})=\frac{B_6H_6}{OB_6}=\frac{h_6}{r_6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $h_6=\frac{\sqrt{3}}{2}r_6$

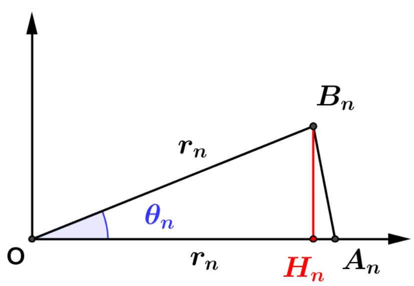
3. L'aire du triangle OH_6B_6 est égale à $\frac{1}{2}\times r_6\times h_6=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}\times r_6\times ¿\frac{\sqrt{3}}{2}\times r_6=\frac{1}{6}$ $\Leftrightarrow$ $r_6{}^2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

donc $r_6=\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec n ⩾ 4

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, soit H_n le pied de la hauteur issue de B_n du tiangle OA_nB_n.



$h_n = B_nH_n$ $\quad \sin(\theta_n) = \frac{B_nH_n}{OB_n} = \frac{h_n}{r_n}$ $\quad h_n = r_n \sin(\theta_n)$

L'aire du triangle OA_nB_n est égale à $\frac{1}{2} \times OA_n \times B_nH_n = \frac{1}{2} \times r_n \times h_n = \frac{1}{2} \times r_n^2 \times \sin(\theta_n)$

2. P_n est constitué de n triangles isocèles de sommet principal O, superposables donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OB_n})$ est : $\frac{2\pi}{n}$ donc $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$

L' aire du triangle OA_nB_n est égal à $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{2} \times r_n^2 \times \sin(\theta_n) = \frac{1}{2} \times r_n^2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \times r_n^2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Leftrightarrow r_n^2 = \frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}}$ (car $r_n > 0$).

Partie C : étude de la suite (r_n)

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;\pi[$, $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

$n \geqslant 4$ donc $0 < \frac{2\pi}{n} < \pi$

$f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

donc $\frac{1}{\pi} \times f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = r_n^2$ et $r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

1. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc pour tout entier naturel $n \geqslant 4$ on a :
$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $2\pi > 0$ donc $0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$

2. f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a :
$f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ et $\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc :

$\sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$ soit $r_{n+1} < r_n$.

<u>Conclusion</u>

La suite (r_n) est décroissante

<u>Conséquence</u>

La suite (r_n) est décroissante et minorée par 0 donc la suite (r_n) est convergente.

On admet que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642$ à 10^{-4} près.

3. **L'algorithme va afficher la plus petite valeur de n telle que** $r_n \leqslant 0{,}58$ **.**

$r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} = 0{,}620$ à 10^{-3} $\quad r_6 > 0{,}58$

$r_7 = \sqrt{\frac{2}{7\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}} = 0{,}605$ à 10^{-3} près $\quad r_7 > 0{,}58$

$r_8=\sqrt{\dfrac{2}{8\sin\left(\dfrac{2\pi}{8}\right)}}=0{,}595$ à 10^{-3} près $\quad r_8>0{,}58$

$r_9=\sqrt{\dfrac{2}{9\sin\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)}}=0{,}588$ à 10^{-3} près $\quad r_9>0{,}58$

$r_{10}=\sqrt{\dfrac{2}{10\sin\left(\dfrac{2\pi}{10}\right)}}=0{,}583$ à 10^{-3} près $\quad r_{10}>0{,}58$

$r_{11}=\sqrt{\dfrac{2}{11\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)}}=0{,}5799$ à 10^{-4} près $\quad r_{11}\leqslant 0{,}58$

L'algorithme affichera n=11.