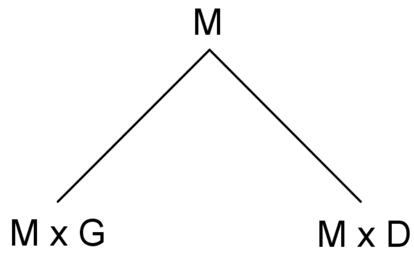
Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.
Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

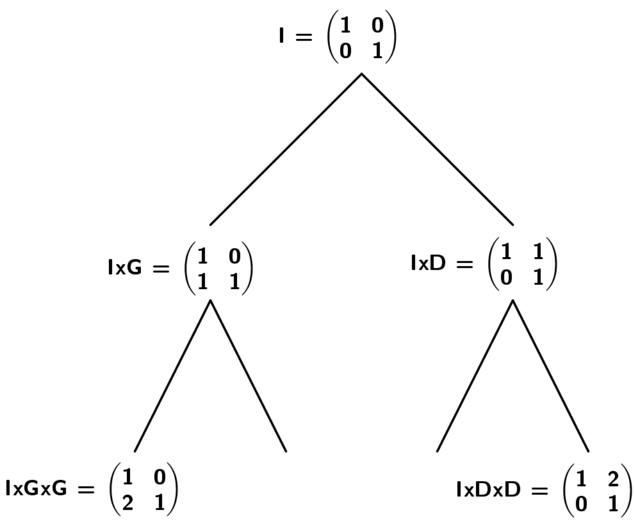
On considère les deux matrices : $G=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches $M\times G$ (à gauche) et $M\times D$ (à droite). Ces deux nouvelles sont appelées les matrices filles de M.



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Bocrot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Bocrot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b+d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$. Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\dfrac{3}{5}$.

3. Soit $M=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_M=ad-bc$ la différence des produits diagonaux de cette matrice.

3.a. Montrer que si $ad-bc=1$, alors $d(a+c)-c(b+d)=1$.

3.b. En déduire que si $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que $\Delta_M=ad-bc=1$, alors $\Delta_{M\times G}=1$, c'est à dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M\times G$ est aussi égale à 1.
On admet de même que $\Delta_{M\times D}=1$, et que pour toutes les autrs matrice N de l'arbre de Stern-Bocrot vérifient l'égalité $\delta_N=1$.

4. Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5. Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible.

On considère l'algorithme suivant.

```
Variables :      m et n sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux
Traitement :     Tant que m≠n , faire
                    Si m < n
                          Afficher « gauche »
                          n prend la valeur n - m
                    Sinon
                          Afficher « droite »
                          m prend la valeur m – n
```

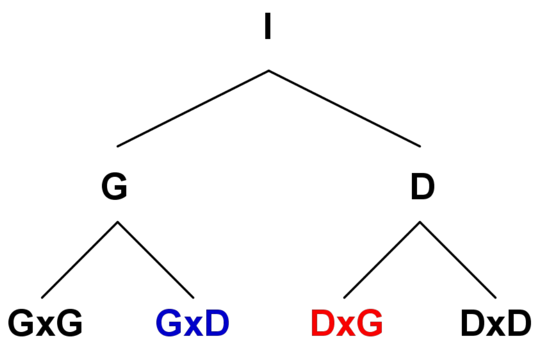
5.a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs m=4 et n=7.

Affichage		Gauche	...	...	...
m	4	...	...	...	...
n	7	...	...	...	...

5.b. Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fournit avec les valeurs m=4 et n=7.

CORRECTION

1. La matrice initiale est : $M=I$.
Les deux matrices filles de I sont : $I\times G=G$ et $I\times D=D$.
Les deux matrices filles de G sont : $G\times G$ et $G\times D$.
Les deux matrices filles de D sont : $D\times G$ et $D\times D$.
On obtient l'arbre jusqu'à la troisième ligne :



Les deux matrices demandées sont : $A=G\times D$ et $B=D\times G$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times0&1\times1+1\times0\\1\times1+1\times0&1\times1+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times1&1\times0+1\times1\\0\times1+1\times1&0\times0+1\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

2. Pour le trajet « gauche-droite-gauche » on obtient la matrice

$$G\times D\times G=(G\times D)\times G=A\times G=\begin{pmatrix}1\times1+1\times1&1\times0+1\times1\\1\times1+1\times2&1\times0+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{2+1}{3+2}=\frac{3}{5}\ .$$

3.a. on calcule $d(a+c)-c(b+d)$ sachant que : $ad-bc=1$.
d(a+c)-c(b+d)=da+dc-cb-cd=ad-bc=1.

3.b. $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ $\Delta_M=ad-bc=1$

$$M\times G=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\times1+c\times1&a\times0+c\times1\\b\times1+d\times1&b\times0+d\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&c\\b+d&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&C\\B&D\end{pmatrix}$$

$\Delta_{M\times G}=AD-BC=d(a+c)-c(b+c)=1$

On admet de même que $\Delta_{M\times D}=1$ et que pour toute matrice N de l'arbre de Stern-Brocot, on a : $\Delta_N=1$.

4. Pour toute matrice $N=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-bocrot, on a $\Delta_N=1$ donc $ad-bc=1$ et $d(a+c)-c(b+d)=1$. La fraction associée à la matrice N est : $\frac{a+c}{b+d}$.
Il existe deux entiers relatifs d et $-c$ tels que $d(a+c)-c(b+d)=1$ donc le théorème de bezout nous permet d'affirmer que les entiers naturels (a+c) et (b+d) sont premiers entre eux et que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

5.a. On complète le tableau donné en utilisant l'algorithme.

Affichage		Gauche	Droite	Gauche	Gauche
m	4	4	1	1	1
n	7	3	3	2	1

5.b. Conjecture

Les entiers naturels m et n, non nuls, premiers entre eux étant donnés, l'algorithme permet de déterminer une matrice de l'arbre de Stern-Brocot dont la fraction associée est $\frac{m}{n}$.

Exemple

Pour m=4 et n=7, le trajet obtenu est : « gGuche-Droite-Gauche-Gauche », la matrice correspondante est :

$$G\times D\times G\times G=(G\times D)\times(G\times G)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+1\times2 & 1\times0+1\times1\\ 1\times1+2\times2 & 1\times0+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

La fraction associée est : $\frac{3+1}{5+2}=\frac{4}{7}=\frac{m}{n}$.