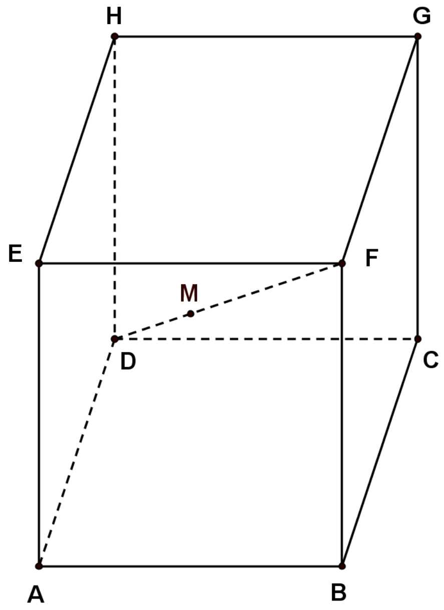
Exercice 1 6 points

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-dessous.



Les arêtes sont de longueur 1
L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Partie B

A tout réel x de l'intervalle [0;1], on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0\leq\theta\leq\pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? Avec le point F ?

2.a. Justifier que les coordonnées du point M sont (x;x;x)

2.b. Montrer que $\cos(\theta)=\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$.
On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. On a construit ci-après le tableau de variation de la fonction

$$f:\ x \rightarrow \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

3.a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

3.b. l'angle θ est-il maximal ?

CORRECTION

Partie A

Le repère $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$ est orthonormé.
On donne les coordonnées de chaque sommet du cube :
$A(1;0;0)$; $B(1;1;0)$; $C(0;1;0)$; $D(0;0;0)$; $E(1;0;1)$; $F(1;1;1)$; $G(0;1;1)$; $H(0;0;1)$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG) (exemples : $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$).

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB}=1\times0+1\times1+1\times(-1)=1-1=0$
$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG}=1\times1+1\times(-1)+1\times0=1-1=0$

Conclusion
$\overrightarrow{DF}$ **est un vecteur normal au plan (EBG).**

2. $M(x;y;z)$ appartient au plan (EBG) si et seulement si $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EM}=0$.

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EM}=1\times(x-1)+1\times(y-0)+1\times(z-1)=x+y+z-2$

(EBG) : x+y+z-2=0.

3. (DF) est la droite passant par D et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$.

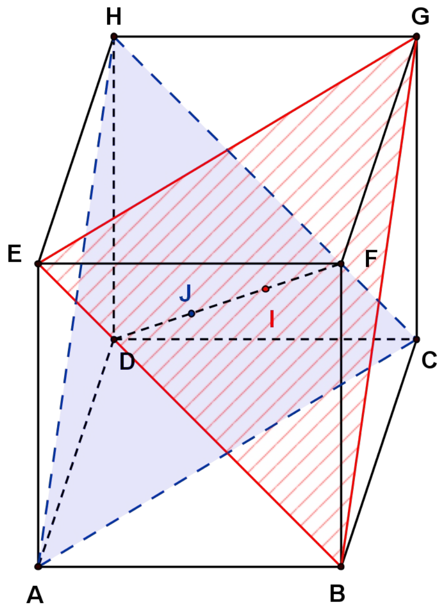
On obtient pour représentation paramétrique de (DF) : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ t décrit $\mathbb{R}$.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection I du plan(EBG) et la droite (DF), on résout le système : $\begin{cases}x+y+z-2=0\\x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$.

On obtient $t+t+t-2=0 \Leftrightarrow 3t=2 \quad t=\frac{2}{3}$ donc $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

On peut démontrer de la même manière que le point d'intersection J du plan (AHC) et de la doite (DF) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Remarque
Les plans (EBG) et (AHC) sont parallèles.



Partie B

1. Le triangle EBD est un triangle équilatéral, ces trois côtés sont des diagonales de carrés de côté de longueur 1 donc l'angle $\widehat{EDB}=\frac{\pi}{3}$.

Le triangle EFB est rectangle en F donc l'angle $\widehat{EFB}=\frac{\pi}{2}$.

2.a. $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DF}$ or $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$ et **M(x;x;x).**

2.b. $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}1-x\\0-x\\1-x\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\0-x\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB}=(1-x)\times(1-x)+(0-x)\times(1-x)+(1-x)\times(0-x)=(1-x)^2-x(1-x)-x(1-x)$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB}=1+x^2-2x+x^2-x+x^2-x=3x^2-4x+1$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB}=ME\times MB\times\cos(\widehat{EMB})=\ ME\times MB\times\cos(\theta)$

$ME^2=(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2=1-2x+x^2+x^2+1-2x+x^2=3x^2-4x+2$

$MB^2=(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2=3x^2-4x+2$

donc ME=MB et $ME\times MB=ME^2=MB^2=3x^2-4x+2$.

<u>Conséquence</u>

$3x^2-4x+1=(3x^2-4x+2)\times\cos(\theta)$

On ne peut pas avoir ME=MB=0 car les points E et B sont distincts donc $3x^2-4x+2\neq 0$.

Ou $3x^2-4x+2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$.

<u>Conclusion</u>

$$\cos(\theta)=\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$$

3.a. Le triangle MEB est rectangle enM si et seulement si $\cos(\theta)=0$

En utilisant le tableau de variations de f, on peut affirmer que $\cos(\theta)=0$ si et seulement si $x=\frac{1}{3}$

ou x=1.

Si $x=\frac{1}{3}$ alors le point M est en J.

S1 x=1 alors le point M est en F.

3.b. La fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$ donc la mesure θ de l'angle $\widehat{EMB}$ est maximale si et seulement si $\cos(\theta)$ est minimal donc pour $x=\frac{2}{3}$ et le point est alors en I.

<u>Remarque</u>

On a alors $\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ el $\theta=\frac{2\pi}{3}$.