Exercice 2 6 points

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement des parkings d'une ville.
Dans tout l'exercice les probabilités seront donnés avec une précision de 10^{-4}.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Patie A : Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente du parking et le moment où ele franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les obsevations faites sur une journée.

Durée d'attente en minutes	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8]
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Proposer une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimée en minute).
2.a. Justifier que l'on peut choisir $\lambda=0{,}5$ mn.
2.b. Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
2.c. Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Partie B : Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

Une fois garée, la durée de stationnement d'une voiture est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu=70$ mn et d'écart-type $\sigma=30$ mn .

1.a. Quelle est la durée moyenne de stationnement d'une voiture ?
1.b. Un automobiliste entre et se gare dans le parking. Quelle est la probabilité que sa durée de stationnement dépasse deux heures ?
1.c. A la minute près, quel est le temps maximum de stationnement pour au moins 99 % des voitures ?

2. La durée de stationnement est limitée à trois heures. Le tableau donne le tarif de la première heure et chaque heure supplémentaire est facturée à un tarif unique. Toute heure commencéeest due intégralement.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 mn	Entre 15 mn et 1h	Heure supplémentaire
Tarif en euros	Gratuit	3.5	t

Déterminer le tarif t de l'heure supplémentaire que doit fixer le gestionnaire du parking pour que le prix moyen de stationnement d'une voiture soit de 5 euros.

Partie C : Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville

La durée de stationnement d'une voiture dans un parking de centre-ville est modélisée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.
On sait que la moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes et que 75 % des voitures ont un temps de stationnement inférieur à 37 minutes.
Le gestionnaire du parking vise l'objectif que 95 % des voitures aient un temps de stationnement entre 10 et 50 minutes. Cet objectif est-il atteint ?

CORRECTION

Partie A : Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

1. L'effectif total est : $75+19+10+5=109$.
les centres des classes sont : 1 ; 3 ; 5 ; 7.
Estimation de la moyenne :
$\frac{1\times75+3\times19+5\times10+7\times5}{109}=\frac{75+57+50+35}{109}=\frac{217}{109}=$ **2** **à** 10^{-2} **près.**

2.a. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ est : $E(T)=\frac{1}{\lambda}$.
On veut que E(T)=2 (moyenne).
$\frac{1}{\lambda}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{1}{2}=$ **0,5** (minute).

2.b. On nous demande de calculer : $P(T\leqslant2)$.
La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=0{,}5\,e^{-0{,}5\,t}$ et la fonction F définie par $F(t)=-e^{-0{,}5t}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
$P(T\leqslant2)=\int_0^2 f(t)\,dt=F(2)-F(0)=e^{-1}+e^{0}=1-\frac{1}{e}=$ **0,6321** **à** 10^{-4} **près.**

2.c. On nous demande de calculer $P_{(1\leqslant T)}(T\leqslant2)$.
Une loi de probabilité exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement donc :
$P_{(1\leqslant T)}(T\leqslant2)=P(T\leqslant2-1)=P(T\leqslant1)=\int_0^1 f(t)\,dt=1-e^{-0{,}5}=1-\frac{1}{\sqrt{e}}=$ **0,3935.**

Partie B : Durée et tarifsde stationnement dans ce parking souterrain

1.a. D suit la loi normale d'espérance $\mu=70$ (minutes) et d'écart-type $\sigma=30$ (minutes).
Donc la durée moyenne de stationnement d'une voiture est : **70 minutes.**

1.b. 2 heures = 120 minutes.
On nous demande de déterminer : $P(120\leqslant D)$
En utilisant la calculatrice on obtient : $P(120\leqslant D)=$ **0,0478 .**

1.c. a est le temps (en minutes) maximal de stationnement pour au moins 99 % des voitures.
Soit $P(T\leqslant a)=0{,}99$.
En utilisant la calculatrice on obtient : a = 139,79.
On arrondit à la minute près : **a = 140 minutes = 2heures 20 minutes.**

2. La durée de stationnement est limité à 3 heures donc il y a 4 tarifs différents : 0 ; 3,5 ; 3,5+t ; 3,5+2t.
Les probabilités associés à ces tarifs sont : $P(D\leqslant15)=0{,}0334$; $P(15\leqslant D\leqslant60)=0{,}3361$; $P(60\leqslant D\leqslant120)=0{,}5828$ et $P(120\leqslant D\leqslant180)=0{,}0477$.
On utilise la calculatrice pour obtenir des valeurs approchées des probabilités à 10^{-4} près et on vérifie que la somme des 4 probabilités est égale à 1.
On peut remarquer que les valeurs apporochées de $P(120\leqslant D\leqslant180)$ et $P(120\leqslant D)$ diffèrent de 0,0001.
On donne les résultats sous la forme d'un tableau.

Durée de stationnement	Inférieure à 15 mn	Entre 15 mn et 1h	Entre 1h et 2h	Entre 2h et 3h
Tarif en euros: x_i	Gratuit	3.5	3.5+t	3.5+2t
$P(X=x_i)$	P(D<=15)=0.0334	P(15<=D<=60)=0.3361	P(60<=D<=120)=0.5828	P(120<=D<=180)=0.0477

On note X la variable aléatoire égale au tarif .
On veut que l'espérance mathématique de X : E(X) soit égale à 5.
$E(X)=0\times 0{,}0334+3{,}5\times 0{,}3361+(3{,}5+t)\times 0{,}5828+(3{,}5+2t)\times 0{,}0477=3{,}5\times 0{,}9666+(0{,}5828+0{,}0954)t$
$E(X)=3{,}3831+0{,}6782t$
$E(X)=5 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}6782t=5-3{,}3831 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}6782=1{,}6169 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{1{,}6169}{0{,}6782}=2{,}38$ à 10^{-2} près.

Le prix de l'heure supplémentaire doit-être de 2,38 € pour que le prix moyen de stationnement soit de 5 €.

Partie C : Temps d'attente pour se garer dans un parkind de centre-ville

La variable aléatoire T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ' .
La moyenne du temps de stationnement dans ce parking est égale à 30 minutes donc $\mu'=30$.
On sait que $P(T'\leqslant 37)=0{,}75$.
La variable aléatoire $Z=\frac{T'-30}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée et réduite.
$P(T'\leqslant 37)=P(Z\leqslant\frac{7}{\sigma'})=0{,}75$.
En utilisant la calculatrice, on détermine le nombre b tel que $P(Z\leqslant b)=0{,}75$. On obtient b=0,6745
$\frac{7}{\sigma'}=0{,}6745 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma'=\frac{7}{0{,}6745}=10{,}38$ à 10^{-2} près.
Si on arrondit à la minute près, $\sigma'=10$.
Nous savons que si T' suit la loi normale d'espérance $\mu'=30$ et $\sigma'=10$ alors :
$P(30-2\times 10\leqslant T'\leqslant 30+2\times 10)=0{,}95$.
Conclusion
L'objectif du gestionnaire est atteint.