

Exercice 3

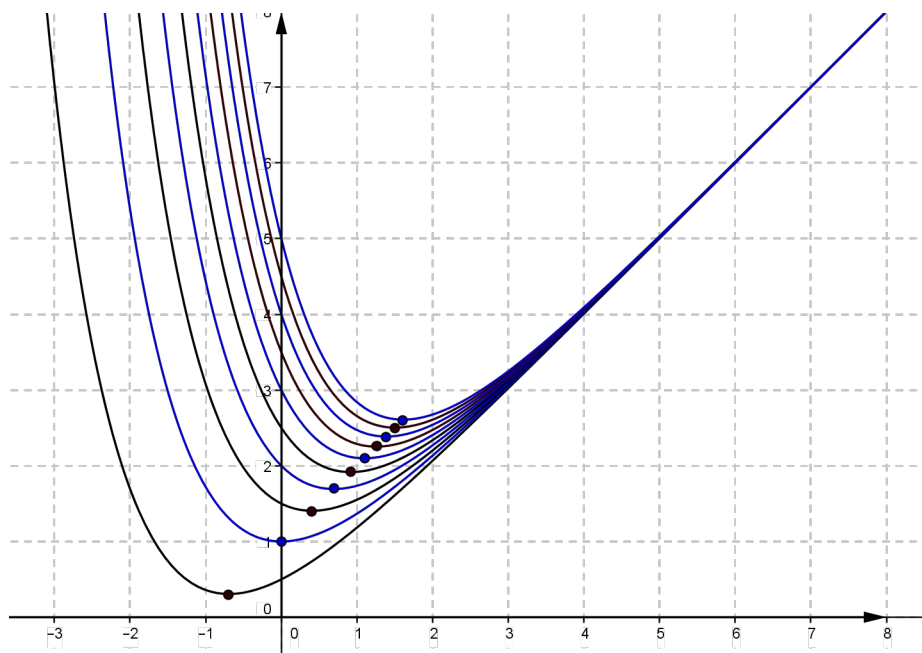
3 points

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté quelques courbes $\mathcal{C}_f$ Pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

CORRECTION

k est un nombre réel distinct strictement positif.

Pour tout nombre réel x : $f_k(x) = x + k e^{-x}$.

f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(e^{-x})' = -e^{-x}$ donc $f_k'(x) = 1 - k e^{-x}$.

$$f_k'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - k e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq k e^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x}} \geq k \Leftrightarrow e^x \geq k \Leftrightarrow x \geq \ln(k).$$

De même $f_k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(k)$

On donne les variations de f_k sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
$f_k'(x)$			
$f_k(x)$		$\searrow$ $\nearrow$ $\ln(k)+1$	

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + k e^{-\ln(k)} = \ln(k) + k e^{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} = \ln(k) + k \times \frac{1}{k} = 1 + \ln(k).$$

Donc $A_k(\ln(k); 1 + \ln(k))$ $x = \ln(k)$ et $y = 1 + \ln(k) = 1 + x$.

Conclusion

Les points A_k appartiennent à la droite d'équation $y = x + 1$.