

Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A : Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0;1[$ par

$$f(x) = 30 \ln\left(\frac{30x}{1-x}\right) \text{ où } x \text{ désigne le diamètre exprimé en mètre et } f(x) \text{ l'âge en années.}$$

1. Démontrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est à dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B :

On a relevé la valeur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11.2	15.6	18.05	19.3	20.55	21.8	23	24.2	25.4	27.6	29.65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0.22	0.245	0.25								

- 1.a. Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
- 1.b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
- 3.a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
- 3.b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque le diamètre mesure environ 70 cm ?

CORRECTION

Partie A : Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;1[$, $f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$.

1. f est dérivable sur $]0;1[$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u} \quad u(x) = \frac{20x}{1-x} \quad u'(x) = \frac{20(1-x) - (20x) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{20 - 20x + 20x}{(1-x)^2} = \frac{20}{(1-x)^2}$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{20}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{20x} = \frac{1}{x(1-x)}$$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;1[$, $x(1-x) > 0$ (signe du trinôme $T(x) = -x^2 + x$).

Conséquence

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;1[$, $f'(x) = \frac{30}{x(1-x)} > 0$.

f est strictement croissante sur $]0;1[$.

2. On doit résoudre la double inéquation : $20 \leq f(x) \leq 120 \Leftrightarrow 20 \leq 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 120$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leq 4 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} \leq \frac{20x}{1-x} \leq e^4$$

1^{ère} inéquation :

x appartient à l'intervalle $]0;1[$.

$$e^{\frac{2}{3}} \leq \frac{20x}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)e^{\frac{2}{3}} \leq 20x \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} \leq \left(20 + e^{\frac{2}{3}}\right)x \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leq x$$

$$\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} = 0,09 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

2^{ème} Inéquation :

$$\frac{20x}{1-x} \leq e^4 \Leftrightarrow 20x \leq e^4(1-x) \Leftrightarrow (20 + e^4)x \leq e^4 \Leftrightarrow x \leq \frac{e^4}{20 + e^4}$$

$$\frac{e^4}{20 + e^4} = 0,73 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Conclusion

Le diamètre du tronc d'un épicéa, d'âge compris entre 20 ans et 120 ans, est compris entre 9 cm et 73 cm.

Partie B

1.a. $0,245 = \frac{18,05 - 15 - 6}{80 - 70} = \frac{2,45}{10}$

0,245 est la vitesse moyenne de croissance en mètre par année. C'est à dire tous les ans entre 70 ans et 80 ans la hauteur augmente (en moyenne) de 24,5 cm.

1.b. En C3 : **$(C2-B2)/(C1-B1)$**

2. 27 cm = 0,27 m

L'âge d'un épicéa de diamètre 27 cm est :

$$f(0,27) = 30 \ln\left(\frac{20 \times 0,27}{1 - 0,27}\right) = 30 \ln\left(\frac{5,4}{0,73}\right) = 60 \text{ à l'unité près.}$$

La vitesse moyenne de croissance, en mètres par année, d'un épicéa d'âge compris entre 50 ans et 70 ans est : 0,22.

Pour 60 ans, la hauteur (en mètres) d'un épicéa est : $11,2 + 10 \times 0,22 = 13,4 \text{ m}$.

3.a. On complète le tableau donné dans l'énoncé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11.2	15.6	18.05	19.3	20.55	21.8	23	24.2	25.4	27.6	29.65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0.22	0.245	0.25	0.25	0.25	0.24	0.24	0.24	0.22	0.205	0.1675

La vitesse de croissance est maximale est de 0,25 mètres par années.

Cette croissance maximale est obtenue entre : 80 ans et 85 ans puis entre 85 ans et 90 ans puis entre 90 ans et 95 ans.

Conclusion

L'intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est maximale est : [80;95].

3.b. L'âge d'un épicéa dont le diamètre est 70 cm (0,7 m) est :

$$f(0,7) = 30 \ln \left(\frac{20 \times 0,7}{1 - 0,7} \right) = 30 \ln \left(\frac{14}{0,3} \right) = 115 \text{ à l'unité près.}$$

Conclusion

115 n'appartient pas à l'intervalle [80;95].

Il n'est pas cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm.