Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$ où $a_1, a_2, \ldots a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation :
I prend la valeur 0
P prend la valeur 0
R prend la valeur 0
Traitement :
Pour k allant de 0 à 7
R prend la valeur du reste de le division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
I prend la valeur I+R
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7
P prend la valeur $P+a_{2k}$
Fin Pour
S prend la valeur I+P+c
Sortie :
Si S est un multiple de 10 alors :
Afficher « Le numéro de la carte est correct »
Sinon
Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct »
Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
1.a. Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.
1.b. Justifier que le numéro 5635 4002 9561 3411 est correct.
1.c. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
Quel doit-être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu : 6a35 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connait les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Montrer quil existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
On a trouvé une situation où le ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

ANNEXE
A rendre avec la copie

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

1.b. Après le deuxième Fin Pour on a :

$P=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}+a_{14}=6+5+0+2+5+1+4+4=23$

$S=I+P+c=26+23+1=$ **50.**

$50\equiv 0\ (10)$

Donc le noméro de carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

1.c. On modifie le tableau, si on change uniquement le premier chiffre de rang impair, de la manière suivante.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	6	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	12	6	8	0	18	12	6	2
R	3	6	8	0	0	3	6	2
I	3	9	17	17	17	20	26	28

On obtient I=28.

Le premier chiffre de rang pair est : a les autres sont inchangés.

$P=a+5+0+2+5+1+4=a+17$

$S=28+a+17+1=46+a$

$S\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow \quad a\equiv 4\ (10)$

a est chiffre compris entre 0 et 9 donc **a = 4.**

Le numéro de la carte 6435 4002 9561 3411 est correct.

2. On calcule I er R.

Soit r le este de la division euclidienne de I+R par 10 donc $I+R-r\equiv 0\ (10)$ et $0\leqslant r\leqslant 9$.

Si c est une clé du nombre de 15 chiffre alors $I+R+c\equiv 0\ (10)$ et $0\leqslant c\leqslant 9$.

Conséquence

c est une clé si est seulement si $c+r\equiv 0\ (10)$ (et on a $0\leqslant c+r\leqslant 18$)

. Si $r=0$ alors $c\equiv 0\ (10)$ et $0\leqslant c\leqslant 9$ donc $c=0$.

. Si $r\neq 0\ (1\leqslant r\leqslant 9)$ alos $1\leqslant c+r\leqslant 18$ et $c+r\equiv 0\ (10)$ donc $c+r=10$ et $c=10-r$

on a $1\leqslant c\leqslant 9$ donc $c=10-r$.

Conclusion

Il existe une clé c rendant le numéro correct et cette clé est unique.

3. On suppose que les seize chiffres du numéro sont égaux à b et $0\leqslant b\leqslant 9$.

Remarque

. Si $0\leqslant b\leqslant 4$ alors $0\leqslant 2b\leqslant 8$ et le reste de la division euclidienne de 2b par 9 est égal à 2b.

. Si $5\leqslant b\leqslant 8$ alors $10\leqslant 2b\leqslant 16$ et le reste de la division euclidienne de 2b par 9 est égal à 2b-9.

. Si $b=9$ alors $2b=18$ et le reste de la division euclidienne de 2b par 9 est égal à 0.

1er cas : $0\leqslant b\leqslant 4$

$I=2b\times 8=16b$; $R=7b$; $c=b$ donc $S=I+R+c=16b+7b+b=24b$.

$24b\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow \quad 4b\equiv 0\ (10)$

. Si b=0 alors $4b\equiv 0\ (10)$

. Si b=1 alors $4b\equiv 4\ (10)$

. Si b=2 alors $4b\equiv 8\ (10)$

. Si b=3 alors $4b\equiv 2\ (10)$

. Si b=4 alors $4b\equiv 5\ (10)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Dans ce cas, 0 est la seule valeur possible et le numéro correct est : 0000 0000 0000 0000.

$2^{ème}$ cas : $5 \leqslant b \leqslant 8$

$I=(2b-9)\times 8=16b-72$; $P=7b$; $c=b$ donc $S=I+R+c=24b-72$

$24b-72\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow \quad 4b-2\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow \quad 4b\equiv 2\ (10)$

. Si b=5 alors $4b\equiv 0\ (10)$

. Si b=6 alors $4b\equiv 4\ (10)$

. Si b=7 alors $4b\equiv 8\ (10)$

. Si b=8 alors $4b\equiv 2\ (10)$

Dans ce cas , 8 est la seule valeur possible et le numéro de carte corect est : 8888 8888 8888 8888

$3^{ème}$ cas : b=9

$I=0\times 8=0$; $P=9\times 7=63$; $c=9$ donc $S=I+R+c=63+9=72$

$72\equiv 2\ (10)$

9 n'est pas une valeur possible.

Conclusion

Il existe deux numéros corrects et deux seulement ayant tous les chiffres égaux :
0000 0000 0000 0000 et 8888 8888 8888 8888.

4. Soit N le numéro de carte, initial, correct. On définit I ; R et S. On a : $S=I+R+c\equiv 0\ (10)$

Soit N' le numéro de carte obtenu après interversion des deux chiffres et on définit I' ; R' et S'.

On étudie si le nouveau numéro de carte est correct sachant que l'un des chiffres inversés est 1.

On note d le deuxième chiffre intervenant dans l'interversion.

On a $0\leqslant d\leqslant 9$ et $d\neq 1$ car les deux chiffres inversès sont distincts.

1^{er} Cas : d=0 ou $0\leqslant d\leqslant 4$

. On suppose que le rang de 1 dans n est pair et que le rang de d est impair.

On a $I'=I-2d+2$; $R'=R-1+d$ et $S'=I'+R'+c=I+2-2d+R-1+d+c=I+R+c-d+1=S-d+1$

$S'\equiv -d+1\ (10)$

$S'\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow \quad d\equiv 1\ (10)$

Or $d\neq 1$

Dans ce cas, il n'existe pas de valeur de d pour laquelle N' soit un numéro de carte correct.

. On suppose que le rang de 1 dans N est impair et que le rang de d est pair.

On a $I'=I-2+2d$; $R'=R-d+1$ et $S'=S\mp d-1$

De même, il n'existe pas de valeur de d pour laquelle N' soit un numéro de carte correct.

$2^{ème}$ Cas : $5\leqslant d\leqslant 8$

. On suppose que le rang de 1 dans N est pair et que le rang de d est impair.

On a $I'=I-2d+9+2$; $R'=R-1+d$ et $S'=I-2d+11+R-1+d+c=S-d+10$

$S'\equiv -d+10\ (10)$

$S'\equiv 0\ (10) \quad \Leftrightarrow \quad d\equiv 0\ (10)$

Or $5\leqslant d\leqslant 8$

Dans ce cas, il n'existe pas de valeur de d pour laquelle N' soit un numéro de carte correct.

. On suppose que le rang de 1 dans N soit impair et que le rang de d soit pair.

On a $I'=I-2+2d-9$; $R'=R+1-d$ et $S'=I+2d-11+R+1-d+c=S+d-10$

$S'\equiv d-10\ (10)$

De même, il n'existe pas de valeur de d pour laquelle N' soit un numéro de carte correct.

$3^{ème}$ Cas : d=9

. On suppose que le rang de 1 dans N est pair et que le rang de 9 est impair.

On a $I'=I-0+2$; $R'=R-1+9$ et $S'=I-0,2+R+8+c=S+10$

$S'\equiv 0\ (10)$

Dans ce cas, N' est un numéro de carte correct.

. On suppose que le rang de 1 dans N est impair et le rang de 9 est pair.

$I'=I-2+0$; $R'=R+1-9$ et $S'=I+2+R+8+c=S+10$

$S'\equiv 0\ (10)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

De même, N' est un numéro de carte correct.

Conclusion

Si on permute deux nombres consécutifs distincts dans N dont l'un est 1 on obtient un nombre N' non correct si et seulement si l'autre nombre est égal à : 0 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 8.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés