Exercice 1 7 points

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(x)=xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.
3.a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :
$h(x)=e^{-x}-h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.
3.b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0,+\infty[$ de la fonction : x → e^{-x} .
3.c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur $[0;+\infty[$ par :
$f(x)=xe^{-x}+\ln(x+1)$ et $g(x)=\ln(x+1)$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les reptésentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, on appelle M le point de coordonnées (x;f(x)) et N le point de coordonnées (x;g(x)), M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
1.a. Déterminer la valeur de x pour laquelle MN est maximale et donner cette distance maximale.
1.b. Placer sur le graphique fourni en annexe les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

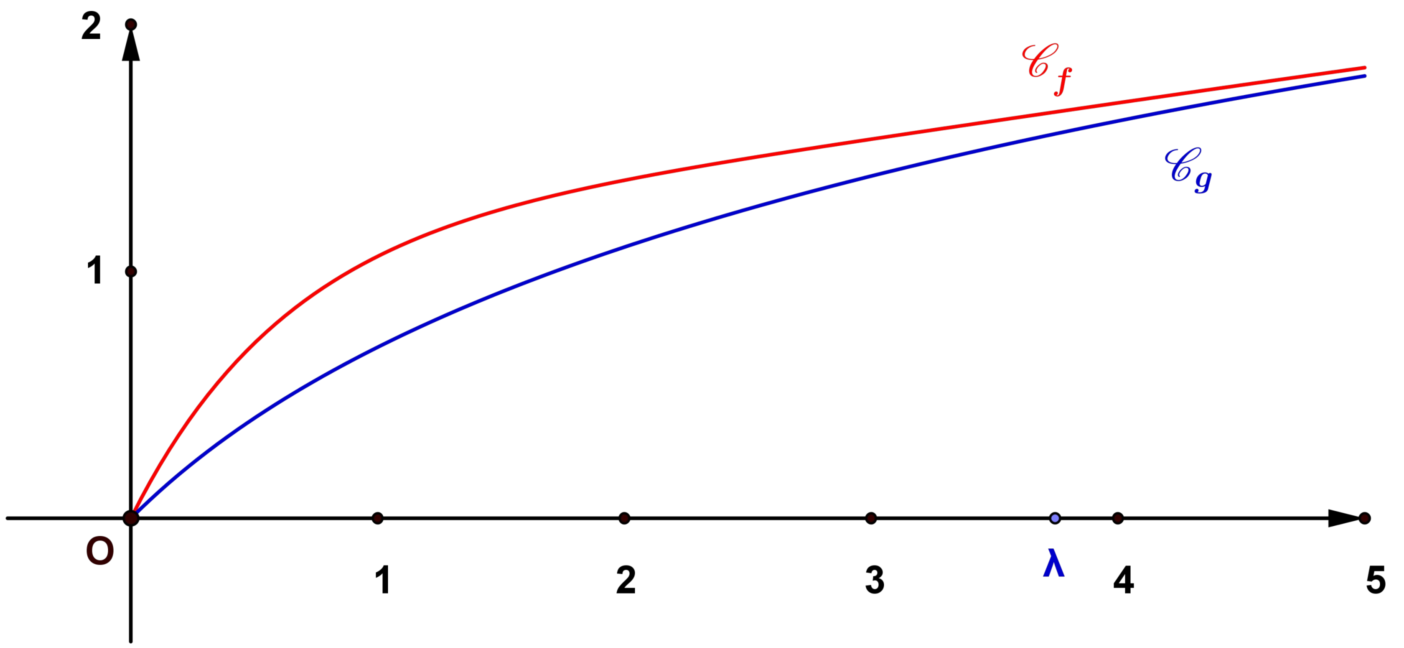
2. Soit λ un réel appartenant à $[0;+\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations : x=0 et $x=\lambda$.
2.a. Hachurer le domaine D_λ , correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe.
2.b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ , exprimée en unités d'aire.
Démontrer que : $A_\lambda=1-\dfrac{\lambda+1}{e^\lambda}$.
2.c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	λ est un réel positif S est un réel strictement compris entre 0 et 1
Initialisation :	Saisir S λ prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $1-\dfrac{\lambda+1}{e^\lambda}<S$ faire λ prend la valeur $\lambda+1$ Fin de Tant que
Sortie :	Afficher λ

3.a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur S=0,8 ?
3.b. Quel est le rôle de cet algorithme.

ANNEXE à rendre avec la copie



CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$: $h(x)=x e^{-x}=x\times\frac{1}{e^x}=\frac{x}{e^x}$.

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, pour l'inverse, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=$ **0.**

2. $(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$.
h est dérivable sur $[0;+\infty[$.
On dérive un produit.
$h'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=e^{-x}-x e^{-x}=(1-x)e^{-x}$.
Pour tout nombre réel x, on a : $e^{-x}>0$.
Le signe de $h'(x)$ sur $[0;+\infty[$ est le signe de (1-x).
$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$; $1-x>0 \Leftrightarrow 1>x$; $1-x<0 \Leftrightarrow 1<x$
<u>Tableau de variations</u>

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

h(0)=0 et $h(1)=\frac{1}{e^1}=\frac{1}{e}$.

3.a. Nous avons démontré que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$: $h'(x)=e^{-x}-x e^{-x}$
soit $h'(x)=e^{-x}-h(x)$ donc $h(x)=e^{-x}-h'(x)$.

3.b. a est un nombre réel, non nul, fixé.
Si la fonction p est définie sur $[0;+\infty[$ par $p(x)=e^{ax}$ alors une primitive de p sur $[0;+\infty[$ est P définie par $P(x)=\frac{1}{a}e^{ax}$.

Pour a=-1 $p(x)=e^{-x}$ $P(x)=\frac{1}{-1}e^{-x}=-e^{-x}$.

3.c. Une primitive de h' sur $[0;+\infty[$ est h.
$h=p-h'$
La fonction H définie sur $[0;+\infty[$ par $H(x)=-e^{-x}-x e^{-x}=(-1-x)e^{-x}$ est une ptimitive de h sur $[0;+\infty[$.

Partie B

1.a. $M(x;f(x))$ et $N(x;g(x))$.
$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0\\ g(x)-f(x)\end{pmatrix}$ $g(x)-f(x)=-x e^{-x}=-h(x)$.
Le tableau de variations de h nous permet d'affirmer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$

on a, $h(x) \geqslant 0$.
Donc $MN = h(x)$.

Or h admet un maximun pour x=1 et ce maximum est égal à $\frac{1}{e}$.

Conclusion

La distance maximale de MN est obtenu pour x=1 et cette distance maximale est égale à $\frac{1}{e}$.

1.b. On place les points M etN correspondant à la valeur maximale de MN sur le graphique donné en annexe.

2.a. On hachure le domaine D_λ correspondant à la valeur de λ proposée sur le graphique donné en annexe.

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f(x)=h(x)+g(x)$ et $h(x) \geqslant 0$.

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0;+\infty[$, et l'aire en unités d'aire de D_λ est :

$$A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^\lambda h(x)\,dx$$

H est une primitive de h sur $[0;+\infty[$ donc :

$$A_\lambda = (\lambda) - H(0) = (-1-\lambda)e^{-\lambda} - (-1-0)e^0 = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}$$

2.c. $\frac{e^\lambda}{\lambda+1} = \frac{e^\lambda}{\lambda} \times \frac{\lambda}{\lambda+1}$

$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e^\lambda}{\lambda} = +\infty$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{\lambda+1} = 1$ donc $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e^\lambda}{\lambda+1} = +\infty$, pour l'inverse $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda+1}{e^\lambda} = 0$.

Conséquence

$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda$ = 1-0= **1.**

3.a. On utilise l'algorithme et on obtient pour S=0,8

λ	A_λ	Comparaison à S
0	0	< S
1	0.26424	< S
2	0.59399	< S
3	0.80085	> S

Donc l'algorithme affiche : **3.**

3.b. **Étant donné, l'algorithme affiche le plus petie entier naturel λ tel que $A_\lambda \geq S$.**

ANNEXE à rendre avec la copie