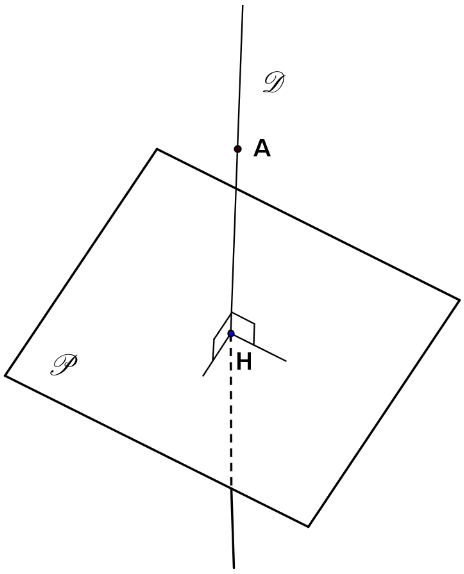
Exercice 2 3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : 2x-z-3=0.
On note A le point de coordonnées $(1;a;a^2)$ où a est un nombre réel.

1. Justifier que quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ (de paramètre t) passant par A et orthogonal au plan $\mathscr{P}$.
2.b. Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.
Exprimer la distance AM en foction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$ et passant par le point A.
Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathscr{P}$.



3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1;a;a^2)$ au plan $\mathscr{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

CORRECTION

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace
$\mathscr{P}$: 2x-z-3=0
$A(1;a;a^2)$

1. A appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si : $2\times 1-a^2-3=0 \Leftrightarrow -a^2-1=0 \Leftrightarrow a^2=-1$
cette équation n'admet pas de solution réelle donc **le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.**

2.a. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

$\mathscr{D}$ est la droite passant par $A(1;a;a^2)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$.
On obtient pour représentation graphique

$$\mathscr{D}\quad\begin{cases}x= & 2t+1\\ y= & a\\ z= & -t+a^2\end{cases}\qquad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

2.b. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2t\\0\\-t\end{pmatrix}$ $\quad AM^2=(2t)^2+0^2+(-t)^2=5t^2$ donc $AM=\sqrt{5t^2}=|t|\sqrt{5}$.

3. Pour déterminer les coordonnées du point H, on résout le système :

$$\begin{cases}2x-z-3= & 0\\ x= & 2t+1\\ y= & a\\ z= & -t+a^2\end{cases}$$

on obtient : $2(2t+1)-(-t+a^2)-3=0 \Leftrightarrow 5t+2-a^2-3=0 \Leftrightarrow t=\frac{a^2+1}{5}$

H est le point de $\mathscr{D}$ correspondant à la valeur du paramètre $t=\frac{a^2+1}{5}$ qui est strictement positif.

On a donc $AH=(\frac{a^2+1}{5})\sqrt{5}=\frac{a^2+1}{\sqrt{5}}$.

La valeur minimale de AH est obtenue pou a=0. Cette valeur minimale est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.