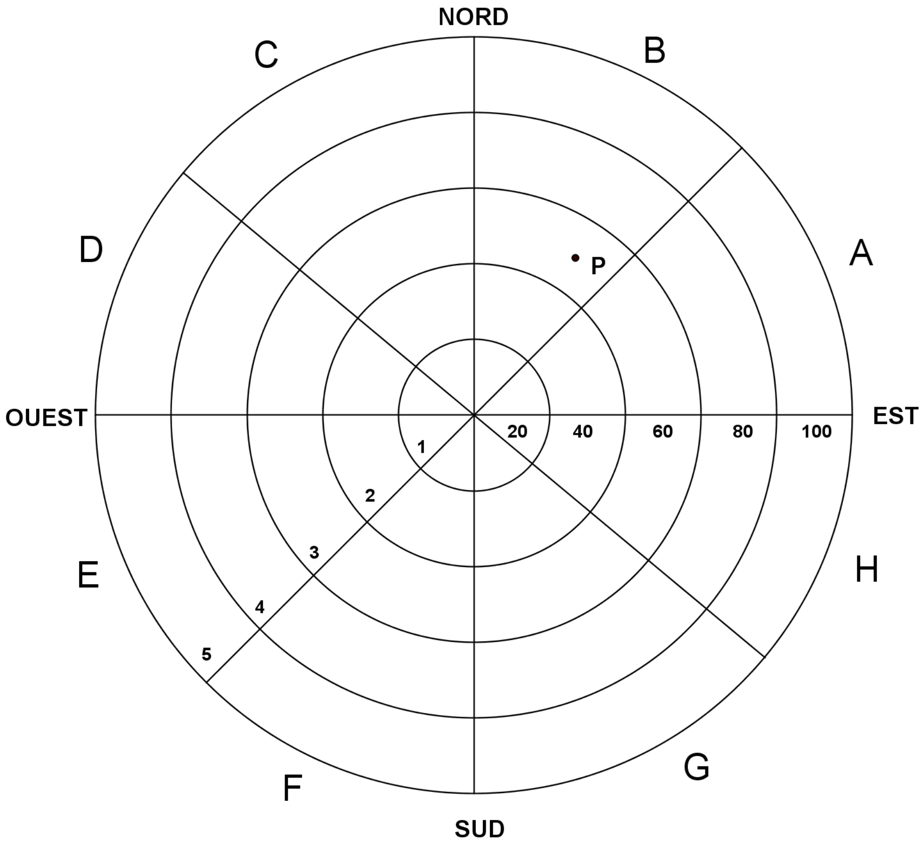
Exercice 3 5 points

Dans une veste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services métérologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, à l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur.
De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur : B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orientés du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran est associé à un point d'affixe z.

Partie A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée).

Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
$40 < r < 60$ et $0<\theta<\frac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

2.a. $z=70\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2.b. $z=-45\sqrt{3}+45\,i$

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe $50\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.
En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approxmative du point d'impact réel de la foudre.
Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe $50\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

- un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance $\mu=50$ et d'écart-type $\sigma=5$;
- un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\frac{\pi}{3}$ et d'écart-type $\frac{\pi}{12}$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes c'est à dire que, quels que soient les intervalles I et J, les événements $(M\in I)$ et $(T\in J)$ sont indépendants.

Dans la suite les probabalités sont arrondies à 10^{-3} près.

1. Calculer la probabilité $P(M<0)$ et interpréter le résultat obtenu.

2. Calculer la probabilité $P(M\in[40;60])$

3. On admet que $P(T\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}])=0,819$. En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

CORRECTION

Partie A

1. **Réponse :** **Proposition C**

$40<r<60$ et $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$

2.a. $z=70e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$r=70 \quad 60<r<80 \quad \theta=-\frac{\pi}{3} \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{4}$

Le point appartient au secteur : G4.

2.b. $z=-45\sqrt{3}+i\,45$

$|z|^2=45^2\times 3+45^2=45^2\times 4=90^2 \quad |z|=90$

$z=90\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \quad \cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin(\theta)=\frac{1}{2} \quad \theta=\frac{5\pi}{6}$

$r=90 \quad 80<r<100 \quad \frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{6}<\pi$

Le point appartient au secteur : D5.

Partie B

1. En utilisant la calculatrice on obtient : $P(M<0)=0$ à 10^{-3} près.
M est la variable aléatoire modélisant le module d'un nombre complexe, donc **l'évenement (M< 0) est l'événement impossible donc P(M< 0)= 0.**

2. $P(40<M<60)=P(50-2\times 5<M<50+2\times 5)$.
Nous savons que si X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors $P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0{,}954$.
Donc **P(40 < M < 60) = 0,954 à** 10^{-3} **près.**

3. Le secteur B3 est l'ensemble des points d'affixe $z=re^{i\theta}$ avec $40<r<60$ et $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$.
L'énoncé précise que les événements (10 < M < 60) et $\left(\frac{\pi}{4}<T<\frac{\pi}{2}\right)$ sont indépendants.

$$P\left((40<M<60)\cap\left(\frac{\pi}{4}<T<\frac{\pi}{2}\right)\right)=P(40<M<60)\times P\left(\frac{\pi}{4}<T<\frac{\pi}{2}\right)=0954\times 0{,}819$$

= 0,781 à 10^{-3} **près**.