Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de tout autre possibilité :
- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « du type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par lrs règles suivantes :
- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine n+1 : 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine n+1 : 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et denviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine n+1.

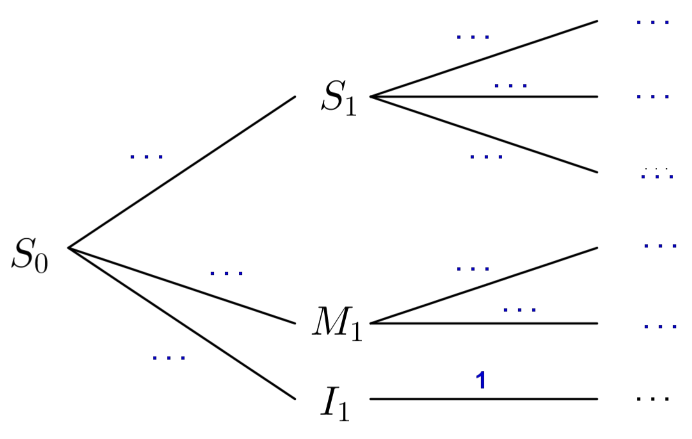
On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :
$P(S_0)=1$; $P(M_0)=0$ et $P(I_0)=0$.

Partie A

On étudie lévolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2)=0{,}2025$

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.
Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0{,}65\, v_n + 0{,}05\, u_n$.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0.8500	0.0500	0.1000
4	2	0.7225	0.0750	0.2025
5	3	0.6141	0.0849	0.3010
6	4	0.5220	0.0859	0.3921
7	5	0.4437	0.0819	0.4744
8	6	0.3771	0.0754	0.5474
...	...	...	...	...
20	18	0.0536	0.0133	0.9330
21	19	0.0456	0.0113	0.9431
22	20	0.0388	0.0096	0.9516

Pour répondre aux questions a et b, suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

2.a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

2.b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé « pic d'épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3.a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85\, u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3.b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right) .$$

4. Calculer les limites de chacunes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

CORRECTION

Partie A

1. Parmi les individus de type S en semaine n, on observe en semaine (n+1) : 85 % restent du type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés.

Donc : $P_{S_n}(S_{n+1})=0{,}85$ $\quad P_{S_n}(M_{n+1})=0{,}05$ $\quad P_{S_n}(I_{n+1})=0{,}10$

et $P_{S_0}(S_1)=P_{S_1}(S_2)=0{,}85$ $\quad P_{S_0}(M_1)=P_{S_1}(M_2)=0{,}05$ $\quad P_{S_0}(I_1)=P_{S_1}(I_2)=0{,}10$

Remarque

$P(S_0)=1$ $\quad P(S_1)=P(S_0)\times P_{S_0}(S_1)=1\times 0{,}85=0{,}85$ $\quad P(M_1)=P(S_0)\times P_{S_0}(M_1)=1\times 0{,}05=0{,}05$

$P(I_1)=PS_0¿\times P_{S_0}(I_1)=1\times 0{,}10=0{,}10$

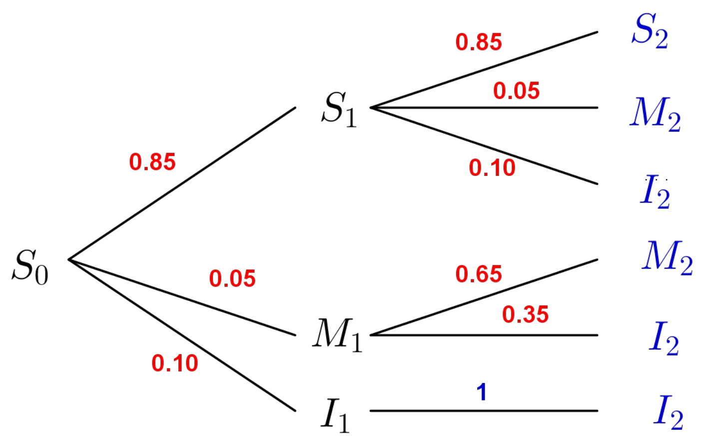
. Parmi les individus malades en semaine n, on observe en semaine (n+1) : 65 % restent malades et 35 % deviennent immunisés.

Donc $P_{M_n}(M_{n+1})=0{,}65$ $\quad P_{M_n}(I_{n+1})=0{,}35$

et $P_{M_1}(M_2)=0{,}65$ $\quad P_{M_1}(I_2)=0{,}35$

. D'autre part, $P_{I_n}(I_{n+1})=1$ et $P_{I_1}(I_2)=1$

. On complète l'arbre des probabilités.



2. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales :

$$P(I_2)=P(S_1\cap I_2)+P(M_1\cap I_2)+P(I_1\cap I_2)=P(S_1)\times \circ_{S_1}(I_2)+P(M_1)\times P_{M_1}(I_2)+P(I_1)\times P_{I_1}(I_2)$$

$$P(I_2)=0{,}85\times 0{,}1+0{,}05\times 0{,}35+0{,}1\times 1=0{,}085+0{,}0175+0{,}1=\mathbf{0{,}2025}$$

3. On nous demande de calculer $P_{I_2}(M_1)$

$$P_{I_2}(M_1)=\frac{P(I_2\cap M_1)}{P(I_2)}=\frac{0{,}05\times 0{,}35}{0{,}2025}=\frac{0{,}175}{0{,}2025}=\mathbf{0{,}086 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Partie B

1. L'énoncé précise que chaque individu peut-être, à l'exclusion de toute autre possibilité, de type S ou malade ou immunisé.

Ces événements sont incompatibles deux à deux.

Donc pour tout entier naturel n, S_n ; M_n et I_n forment une partition de l'univers donc :

$P(S_n)+P(M_n)+P(I_n)=u_n+v_n+w_n=1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0=0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=0{,}65\, v_n+0{,}05\, u_n$.

2.a. En C3 : $=C2\times 0{,}65+B2\times 0{,}05$

2.b. Le pic épidémique est : **6.**
Pour la semaine 6, 8,69 % des individus de la population sont malades.

3.a Pour tout entier naturel n : $P(S_{n+1}) = P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) = 0{,}85 \times P(S_n)$.
Soit $u_{n+1} = 0{,}85\, u_n$.
La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$ et de raison $q = 0{,}85$.
Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 0{,}85^n = 0{,}85^n$;

3.b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$.

Initialisation

$v_0 = 0$ et $\frac{1}{4}(0{,}85^0 - 0{,}65^0) = \frac{1}{4}(1-1) = 0$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que :
$v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$ et on doit démontrer que $v_{n+1} = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$.

Or

$$v_{n+1} = 0{,}65\, v_n + 0{,}05\, u_n = 0{,}65 \times \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n) + 0{,}05 \times 0{,}85^n = \frac{1}{4}(0{,}65 \times 0{,}85^n - 0{,}65 \times 0{,}65^n + 4 \times 0{,}05 \times 0{,}85^n)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}((0{,}65+0{,}2) \times 0{,}85^n - 0{,}65^{n+1}) = \frac{1}{4}(0{,}85^{«n»+1} - 0{,}65^{«n»+1}).$$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{4}(0{,}85^n - 0{,}65^n)$.

4.a. Pour tout entier naturel n, $u_n + v_n + w_n = 1$ donc $w_n = 1 - u_n - v_n$.

$0 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$

$0 < 0{,}65 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}65^n = 0$

Conséquences

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathbf{0}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \mathbf{0}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \mathbf{1}$.

Conclusion

À long terme, tous les individus de la population seront immunisés.