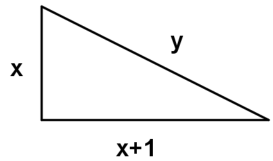
Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et x+1, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.
Ainsi, un TRPI est un triangle rectangle dont les longueurs des côtés de l'angle droit sont deux entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, x+1 et y, où y est la longuer de l'hypothénuse, est un TRPI, on dira que le couple (x;y) définit un TRPI.

Partie A

1. Démontrer que le couple d'entiers naturels (x;y) définit un TRPI si et seulement si, on a :

$$y^2=2x^2+2x+1$$

2. Montrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple (3;5).

3.a. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
3.b. Montrer que dans un couple d'entiers (x;y) définissant unTRPI, le nombre y est nécessairement impair.

4. Montrer que si le couple d'entiers naturels (x;y) définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, et B la matrice colonne $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.
Soient x et y deux entiers naturels ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+B.$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
1.a. Montrer $y'^2=-2x'(x'+1)=y^2-2x(x+1)$.
1.b. En déduire que si le couple (x;y) définit unTRPI, alors le couple (x';y') définit également un TRPI.

2. On considère les suite (x_n) et (y_n) d'entiers naturels, définies par $x_0=3$, $y_0=5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}+B$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n;y_n)$ définit un TRPI.

3. Déterminer, par la méthode de votre choix, que vous préciserez, un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieurs à 2017 ?

CORRECTION

Partie A

1. Un triangle dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers x, x+1 et y est un TRPI si et seulement si ce triangle est rectangle et que l'hypoténuse est pour longueur y donc en utilisant le théorème de Pythagore si est seulement si $x^2+(x+1)^2=y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=x^2+x^2+2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=2x^2+2x+1$

2. Si x=1 alors x+1=2 et $y^2=5$ donc (x;y) ne définit pas un TRPI.
Si x=2 alors x+1=3 et $y^2=4+9=13$ donc (x;y) ne définit pas un TRPI.
Si x=3 alors x+1=4 et $y^2=9+16=25=5^2$ donc (3;5) définit un TRPI.
Le TRPI ayant les plus petits non nuls est le TRPI définit par le couple (3;5).

3.a. n est un entier naturel et n^2 est un entier naturel impair donc $n^2\geqslant 1$ et $n\geqslant 1$.
$n^2=2k+1$ k est un entier naturel.
$n^2-1=2k \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(n+1)=2k$
2 est un nombre premier qui divise le produit (n-1)(n+1) donc il divise l'un des deux facteurs n-1 ou n+1.
Si 2 divise n-1 alors n=2a+1 (a est un entier naturel) donc n est un nombre impair.
Si 2 divise n+1 alors n=2b-1 (b entier naturel non nul car $n\geqslant 1$) donc n est un entier impair.
Conclusion
n est un entier impair.

3.b. x et x+1 sont deux entiers consécutifs donc l'un est un nombre pair et l'autre un nombre impair donc le carré du premier nombre est pair et le carré du second est impair.
La somme des deux carrés est un nombre impair.
Conclusion
y^2 **est un nombre impair donc y est un nombre impair.**

4. Le couple d'entiers naturels (x;y) définit un TRPI si et seulement si x et y sont des entiers naturels vérifiant :
$y^2=2x^2+2x+1$.
$y^2=2x^2+2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x(x+1)+y\times y=1$
On pose u=-2(x+1) et v=y u et v sont desentiers relatifs et on obtient : ux+vy=1.
Le théorème de Bezout nous permet d'affirmer que les entiers naturels x et y sont premiers entre eux.

Partie B

1. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2y+1 \\ 4x+3y+2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'=3x+2y+1 \\ y'=4x3y+2 \end{cases}$.

1.a. $y'^2-2x'(x'+1)=(4x+3y+2)^2-2(3x+2y+1)(3x+2y+1+1)$
$=16x^2+9y^2+4+24xy+16x+12y-2(9x^2+6xy+6x+6xy+4y^2+4y+3x+2y+2)$
$=16x^2+9y^2+24xy+16x+12y+4-18x^2-12xy-12x-12xy-8y^2-8y-6x-4y-4$
$=-2x^2+y^2-2x=y^2-2x(x+1)$.

1.b. Le couple d'entiers naturels (x;y) définit un TRPI si et seulement si $y^2-2x(x+1)=1$ donc le couple d'entiers (x';y') vérifie $y'^2-x'(x'+1)=1$ donc le couple (x';y') définit un TRPI.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n;y_n)$ définit un TRPI.
Initialisation
Pour n=0 $x_0=3$ et $y_0=5$, le couple d'entiers naturels (3;5) définit un TRPI.
La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que le couple d'entiers naturels $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI et on doit démontrer que le couple d'entiers naturels $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI.

Or $x_{n+1}=(x_n)'$ et $y_{n+1}=(y_n)'$, dans la question précédente nous avons démontré que si $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI alors $((x_n)' ;(y_n)')$ définit un TRPI.

Conséquenc

Le couple d'entiers naturels $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer ,que pour tout entier naturel n, le couple d'entiers naturels $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI.

3. On se propose de calculer les premiers termes des suites (x_n) et (y_n)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9+10+1 \\ 12+15+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60+58+1 \\ 80+87+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 119 \\ 169 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 119 \\ 169 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 357+338+1 \\ 476+507+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 696 \\ 985 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 696 \\ 985 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2088+1970+1 \\ 2784+2955+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4059 \\ 5741 \end{pmatrix}$$

Le couple (4069;5741) définit un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

