## Exercice 1 6 points

La société Fibration fournit des abonnements internet et des abonnements de téléphone mobile.
Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement internet, soit un abonnement de téléphonie mobile, il ne cumule pas les deux.
En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

*Les parties A,B et C sont indépendantes.*
*Si nécessaire, les résultats seront arrondis à* $10^{-3}$ .

**Partie A-Durée d'attente**

**1.** Dans question, on s'interesse à la durée d'attente d'un client internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire $D_1$ qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.
**1.a.** Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client internet qui appelle cette ligne d'assistance ?
**1.b.** Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes

**2.** Dans cette question, on s'interesse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire $D_2$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ , $\lambda$ étant un réel strctement positif.
**2.a.** Sachant que $P(D_2 \leqslant 4)=0,798$ , déterminer la valeur de $\lambda$ .
**2.b.** En prenant $\lambda=0,4$ , peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisi au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur ?

**Partie B : Obtention d'un opérateur**

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin.
Sinon, l'appelant obtient un opérateur.
On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.
On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client internet est 0,7.
De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :
Si l'appel provient d'un client internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.
Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

**1.** Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.

**2.** Un client se plaint que son appel a pris fin apès 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur.
Est-il probable que ce soit un client internet ou un client mobile ?

**Partie C : Enquête de satisfaction**

La société annonce un taux de satisfaction de 85 % pour ses clients ayant appelé et obtenu un opérateur.
Une association de consommateurs souhaite vérifier ce taux et interroge 1303 personnes. Parmi celles-ci, 1150 se disent satisfaites.
Que pensez-vous du taux de satisfaction annoncé par la société ?

**CORRECTION**

**Partie A : Durée d'attente**

**1.** La durée d'attente d'un client internet est modélisée par la variable aléatoire $D_1$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,6$ .

**1.a.** La durée d'attente moyenne que peut espérer un client internet est : $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,6}=\frac{5}{3}$ minutes.

**Soit 1 minute et 40 secondes.**

**1.b.** La fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $D_1$ est la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=0,6e^{-0,6t}$ . La fonction F, définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t)=-e^{-0,6t}$ , est une primitive de f sur $[0;+\infty[$ .

$P(D_1 \leqslant 5) = \int_0^5 f(t)dt=F(5)-F(0)=-e^{-3}+1 = 0,950$ à $10^{-3}$ près.

**2.** La durée d'attente d'un client mobile est modélisée par une variable aléatoire $D_2$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ .

La fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $D_2$ est la fonction $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ . G telle que $G(t)=-e^{\lambda t}$ est une primitive de $g$ sur $[0;+\infty[$ .

**2.a.** $P(D_2 \leqslant 4) = \int_0^4 g(t)dt=G(4)-G(0)=-e^{-4\lambda}+1$

$P(D_2 \leqslant 4)=0,798 \quad \Leftrightarrow \quad -e^{-4\lambda}+1=0,798 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-4\lambda}=1-0,798=0,202 \quad \Leftrightarrow \quad -4\lambda=\ln(0,202)$

$\Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{\ln(0,202)}{-4} = 0,400$ à $10^{-3}$ près.

**2.b.** $P(D_2 \leqslant\ )=-e^{-0,4\times5}+1=-e^{-2}+1 = 0,865$ à $10^{-3}$ près. Donc $P(D_2 >5)=0,135$

soit 13,50 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur.

Conclusion

**On ne peut pas considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur.**

**Partie B : Obtention d'un opérateur**

On note :

$I$ l'événement : « l'appel émane d'un client internet »

$\bar{I}=M$ l'événement : « l'appel émane d'un client mobile »

$O$ l'événement : « le client obtient un opérateur »

$\bar{O}$ l'événement : « le client n'obtient pas d'opérateur ».

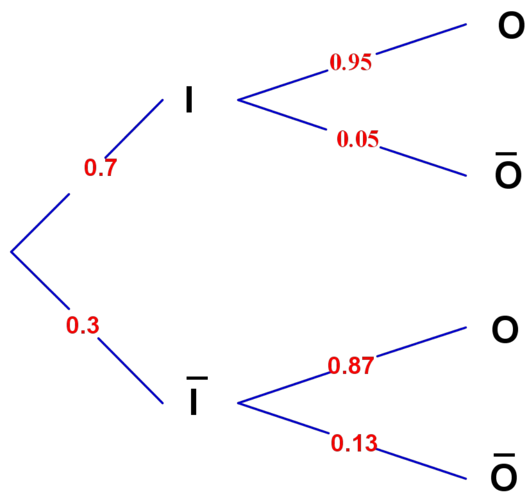
L'énoncé précise :

$P(I)=0,7$ donc $P(\bar{I})=1-0,7=0,3$

$P_I(O)=0,95$ donc $P_I(\bar{O})=1-0,95=0,05$

$P_{\bar{I}}(O)=0,87$ donc $P_{\bar{I}}(\bar{O})=1-0,87=0,13$

On donne les résultats sous la forme d'un arbre de probabilités.




**1.** En utilisant l'arbre de probabilités ou en utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(O)=P(I\cap O)+P(\bar{I}\cap O)=P(I)\times P_I(O)+P(\bar{I})\times P_{\bar{I}}(O)=0,7\times 0,95+0,3\times 0,87=0,665+0,261$$

**P(O) = 0,926**

**2.** On calcule : $P_{\bar{O}}(I)$ et $P_{\bar{O}}(\bar{I})$.

$P(\bar{O})=1-P(O)=1-0,926=0,074$.

$P(I\cap\bar{O})=P(I)\times P_I(\bar{O})=0,7\times 0,05=0,035$

$P(\bar{I}\cap\bar{O})=P(\bar{I})\times P_{\bar{I}}(\bar{O})=0,3\times 0,13=0,39$

$$P_{\bar{O}}(I)=\frac{0,035}{0,074}=\frac{35}{74}=0,473$$

$$P_{\bar{O}}(\bar{I})=\frac{0,039}{0,074}=\frac{39}{74}=0,527$$

Conclusion

**Il est plus probable que ce soit un client mobile.**

**Partie C : Enquête de satisfaction**

$p=0,85$, $1-p=0,15$ et $n=1303$.

$n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geq 5$

On considère l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %

$$J=\left[0,85-1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};0,85+1,96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=\left[0,85-1,96\times\sqrt{\frac{0,85\times 0,15}{1303}};0,85+1,96\times\sqrt{\frac{0,85\times 0,15}{1303}}\right]$$

$1,96\times\sqrt{\frac{0,85\times 0,15}{1303}}=0,019$ à $10^{-3}$ près.

$J=[0,85-0,019;0,85+0,019]=[0,821;0,869]$

La proportion obtenue dans l'échantillon est : $f=\frac{1150}{1303}=0,883$ à $10^{-3}$ près.

Conclusion

**f n'appartient pas à l'intervalle J.**
**Avec un risque d'erreur de 5 %, on peut affirmer que le taux de satisfaction proposé par la société (85%) est sous évalueé.**
**La société peut affirmer qu'au moins 85 % des clients sont satisfaits.**