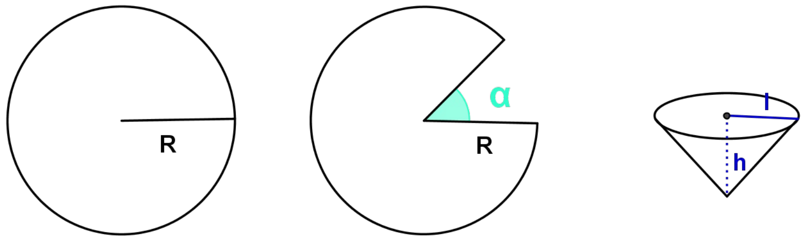
Exercice 2 — 5 points



Dans un disque en carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer on cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.
On appelle l le rayon de la base circulaire de ce cône et h la hauteur.
On rappelle que :

- **i**e volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\mathscr{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ exprimé en radians, est $r\theta$

1. On choisit $R=20$ cm

1.a. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h est $V(h)=\frac{1}{3}\pi(400-h^2)h$.

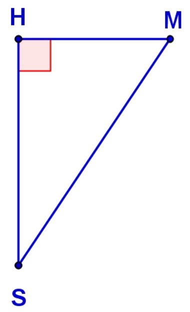
1.b. Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximun.
Donner cette valeur.

1.c. Comment découper le disque de carton pour avoir un volume maximum ?
Donner un arrondi de α au degré près.

2. L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

CORRECTION

1.a. Soit H le pied de la hauteur du cône. H est le centre du cercle, de base du cône, de rayon l.
S est le sommet du cône.
M est un point du cercle de centre H est de rayon l.



Le triangle SHM est rectangle en H.
Le théorème de Pythagore, nous permet d'affirmer que $h^2+l^2=R^2$.
$R=20$ donc $l^2=20^2-h^2=400-h^2$ et l'aire du disque de base du cône est égale à : $\mathscr{A}=\pi l^2=\pi(400-l^2)$.

Le volume du cône est : $V(h)=\frac{1}{3}\pi(400-h^2)h$.

1.b. h appartient à l'intervalle [0;20].

$V(h)=\frac{1}{3}\pi(400h-h^3)$

V est dérivable sur [0;20].

$V'(h)=\frac{1}{3}\pi(400-3h^2)$

Le signe de $V'(h)$ est le signe de $T(h)=400-3h^2=20^2-3h^2=(20-\sqrt{3}h)(20+\sqrt{3}h)$.
Pour tout h de l'intervalle [0;20], le signe de $V'(h)$ est le signe de $20-\sqrt{3}h$.

$20-\sqrt{3}h=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20}{\sqrt{3}}=h$ (remarque : $0\leqslant\frac{20}{\sqrt{3}}\leqslant 20$)

$20-\sqrt{3}h>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20}{\sqrt{3}}>h$

$20-\sqrt{3}h<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{20}{\sqrt{3}}<h$

Tableau de variations de V

X	0		$\frac{20}{\sqrt{3}}$		0
V '(h)		+	0	−	
V(h)	0	↗	M	↘	0

Le volume du cône est maximal pour $h=11{,}5$ cm (à 10^{-1} près).

Le volume maximal est : $M=\frac{1}{3}\pi\left(400-\frac{400}{3}\right)\frac{20}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\pi\times\frac{800}{3}\times\frac{20}{\sqrt{3}}=\pi\times\frac{16000}{9\sqrt{3}}=$ **3224,53** cm^3

1.c. $l^2=400-\frac{400}{3}=\frac{800}{3}$ donc $l=20\sqrt{\frac{2}{3}}$.

La longueur du cercle de rayon R est : $2\pi R=40\pi$.

La longueur du cercle de rayon l est : $2\pi l = 40\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

La longueur de l'arc de cercle du secteur angulairede rayon R et d'angle α est :

$40\pi - 40\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 40\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Si θ est une mesure en radians de α, la longueur de cet arc est : $R\theta = 20\theta = 40\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{3})$

donc $\theta = 2\pi(1-\sqrt{\frac{2}{3}})$ en radians.

La mesure en degré de l'angle α est : $\frac{\theta}{\pi}\times 180 = 360(1-\sqrt{\frac{2}{3}})$ = **66° au degré près.**

2. R est un nombre strictemnt positif fixé.

$V(h) = \frac{1}{3}\pi l^2 h$ et $l^2 = R^2 - h^2$

$V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - l^2)h$

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2)$

$V'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{R}{\sqrt{3}}$

$l^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$ et $l = R\sqrt{\frac{2}{3}}$

$R\theta = 2\pi R - 2\pi l = 2\pi R - 2\pi R\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\theta = 2\pi(1-\sqrt{\frac{2}{3}})$ en radians.

Conclusion

L'angle α ne dépend pas du rayon R du disque en carton.