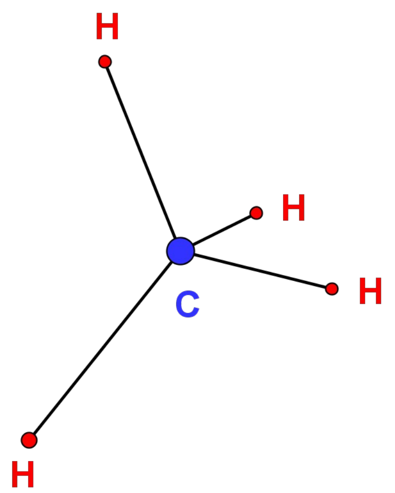
Exercice 3 4 points

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :



. Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
. Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone-hydrogène.
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

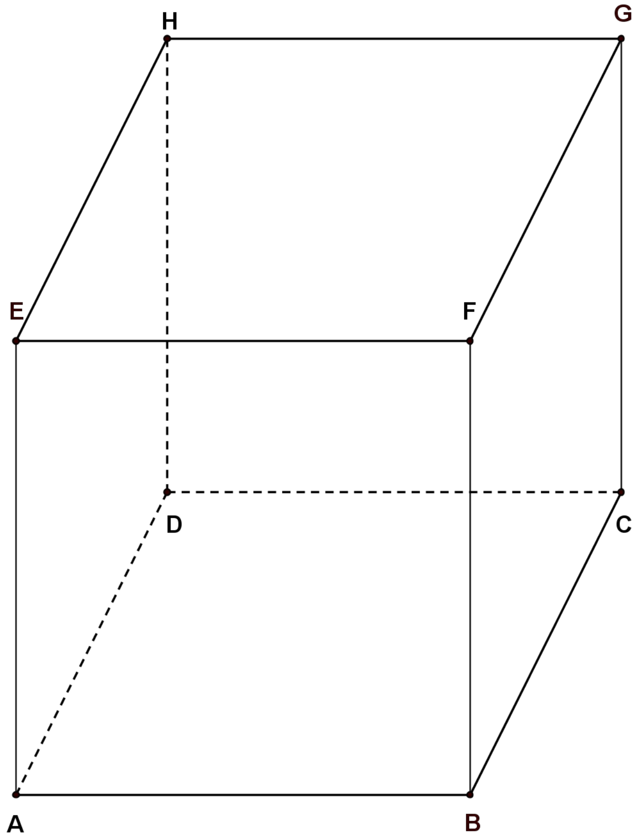
1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
Représenter la molécule dans le cube donné en annexe.

Dans la suite de l'exercice on pourra travailler dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})$.

2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.

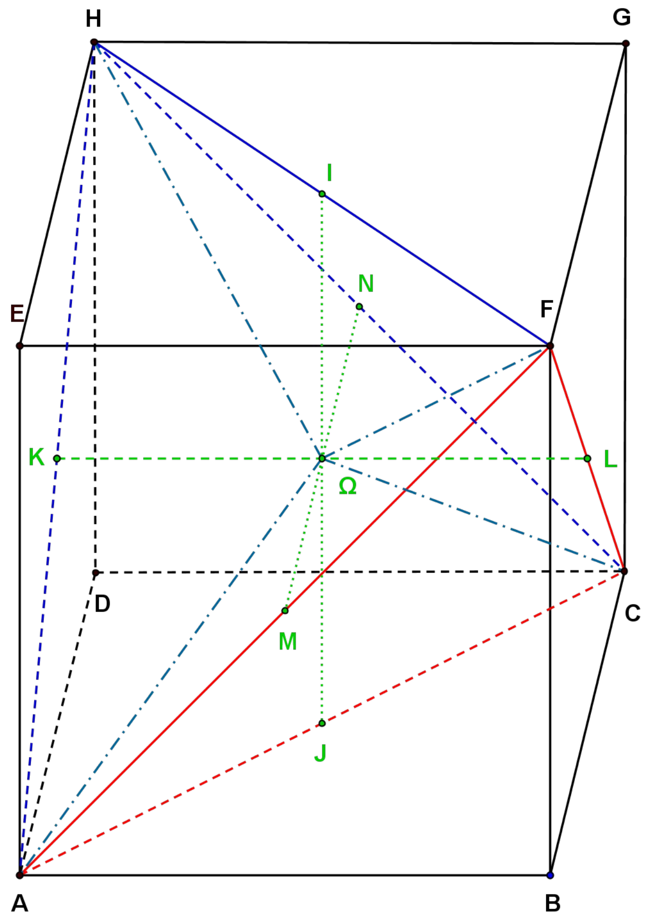
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est à dire l'angle . $\widehat{A\Omega C}$

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



CORRECTION

1.



[AC] est l'une des arêtes du tétraèdre régulier cherché.
[AC] est l'une des diagonales d'un carré du cube.
Si la longueur d'un côté du cube est 1 alors $AC=\sqrt{2}$.
ACF et ACH sont des triangles équilatéraux, de même pour les les triangles AFH et CFH.

Conséquence

ACFH est un tétraèdre régulier.
Pour déterminer un point équidistant de ces quatre sommets, on trace :

. la droite (IJ), I milieu de [HF] et J milieu de [AC], qui est la droite d'intersection des plans médiateurs de [AC] et [FH] (pour tout point R de (IJ) on a RA=RC et RF=RH)
. la droite (MN), M milieu de [AF] et N milieu de [CH], qui est la droite d'intersection des plans médiateurs de [AC] et [CH] (pour tout point R de (MN) on a RA=RC et RF=RH)

On remarque :

$\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HJ}$ donc le quadrilateur IMJN est un parallélogramme.

Soit Ω le point d'intersection des droites (IJ) et (MN), et on a Ω A= Ω C= Ω F= Ω H.

Conclusion

Le carbone est en Ω et l'hydrogène aux quatre sommets A,C, F, H.

2. $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.
On écrit les coordonnées des sommets du cube.
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;0;1)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.
Le centre du cube est le milieu des diagonales du cube par exemple [AG], les coordonnées du centre du cube sont $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Pour obtenir les coordonnées du point Ω on détermine des représentations paramétriques de (IJ) et (MN).

$$I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right),\ J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)\quad \vec{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad (IJ)\ \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ z=t\end{cases}\quad t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

$$M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right),\ N\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)\quad \vec{MN}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad (MN)\ \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=t'\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}\quad t' \text{ décrit } \mathbb{R}$$

Pour déterminer les coordonnées du point Ω, on résout le système : $\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}=t'\\ t=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left\{t=t'=\frac{1}{2}\right.$ donc

$\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

<u>Conclusion</u>

Ω **est le centre du cube.**

3. $\vec{\Omega A}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad \vec{\Omega C}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\vec{\Omega A}\cdot\vec{\Omega C}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

$(\Omega A)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ donc $\Omega A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\Omega C=\Omega A$

$$\vec{\Omega A}\cdot\vec{\Omega C}=\Omega A \text{ x } \Omega C \text{ x } \cos\left(\widehat{A\Omega C}\right)$$

$$-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ x }\cos\left(\widehat{A\Omega C}\right)$$

$$-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\text{ x }\cos\left(\widehat{A\Omega C}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{A\Omega C}\right)=-\frac{1}{3}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$\widehat{A\Omega C}=$ **109,5°** à 10^{-1} près.