Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en ms^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t, $v(t)=9{,}81\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les A et B sont in dépendantes.

Partie A - Cas général

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?

3. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} v(t)=9{,}81\frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

4. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5\,m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m=6$ et $k=3{,}9$
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est $15\ ms^{-1}$.

1. Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ?
Arrondir la réponse au dixième de seconde.

2. En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse.
Arrondir la réponse au dixième de ms^{-1}.

CORRECTION

Partie A – Cas général

1. Pour tout réel positif ou nul t : $v(t)=9{,}81\dfrac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)=9{,}81\dfrac{m}{k}-9{,}81\dfrac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$

$(e^u)'=u'e^u$ donc $\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right)'=-\dfrac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}$

v est dérivable sur $[0;+\infty[$

$v'(t)=-9{,}81\dfrac{m}{k}\left(-\dfrac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right)=9{,}81\,e^{-\frac{k}{m}t}>0$

Conclusion

La vitesse est une fonction strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. **La vitesse augmente donc la goutte ne ralentit pas au cours de sa chute.**

3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{k}{m}t\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty}e^{-t}=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{k}{m}t}=0$

Conséquence

$\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=9{,}81\dfrac{m}{k}$.

4. Pour $t=\dfrac{5m}{k}$

$e^{-\frac{k}{m}\left(\frac{5m}{k}\right)}=e^{-5}$

$v\left(\dfrac{5m}{k}\right)=9{,}81\dfrac{m}{k}\left(1-e^{-5}\right)$

$1-e^{-5}=0{,}993$ à 10^{-3} près.

Donc $v\left(\dfrac{5m}{k}\right)>9{,}81\dfrac{m}{k}\times0{,}99$

Conclusion

Au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$ la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite.

Partie B

$m=6$ $k=3{,}9$ donc $\dfrac{k}{m}=\dfrac{3{,}9}{6}=0{,}65$ et $\dfrac{m}{k}=\dfrac{6}{3{,}9}=\dfrac{60}{39}=\dfrac{20}{13}$

Pour nombre réel t positif ou nul $v(t)=9{,}81\times\dfrac{20}{13}\left(1-e^{-0{,}65t}\right)=\dfrac{196{,}2}{13}\left(1-e^{-0{,}65t}\right)$

1. $v(t)=15 \Leftrightarrow \dfrac{196{,}2}{13}\left(1-e^{-0{,}65t}\right)=15 \Leftrightarrow 1-e^{-0{,}65t}=\dfrac{15\times13}{196{,}2}=\dfrac{65}{65{,}4}=\dfrac{650}{654}=\dfrac{325}{327}$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{325}{327}=e^{-0{,}65t} \Leftrightarrow e^{-0{,}65t}=\dfrac{2}{327} \Leftrightarrow -0{,}65t=\ln\left(\dfrac{2}{327}\right)$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{0{,}65}\times\ln\left(\dfrac{2}{327}\right)=7{,}8$ à 10^{-1} près.

Conclusion

La goutte s'est détachée de son nuage depuis 7,8 s.

2. La valeur moyenne d'une fonction f définie sur l'intervalle [a;b] est le nombre :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Si F est une primitive de f sur [a;b] alors $\mu=\frac{1}{b-a}(F(b)-F(a))$

Si $a\neq 0$, $u(t)=e^{at}$ et $U(t)=\frac{1}{a}e^{at}$ alors U est une primitive de u sur $\mathbb{R}$.

Si $w(t)=e^{-\frac{k}{m}t}$ et $W(t)=-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$ alors W est une primitive de w sur $\mathbb{R}$.

Pour tout t positif ou nul $v(t)=9{,}81\frac{m}{k}-9{,}81\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$

$V(t)=9{,}81\times\frac{m}{k}t-9{,}81\times\frac{m}{k}\times\frac{m}{k}\times e^{-\frac{k}{m}t}$ V est une primitive de v sur $\mathbb{R}$.

$m=6$ et $k=3{,}9$ $V(t)=\frac{196{,}2}{13}t+9{,}81\times\frac{20}{13}\times\frac{20}{13}\times e^{-0{,}65t}$.

La valeur moyenne de v sur [0;7,8] est $\mu=\frac{1}{7{,}8}(V(7{,}8)-V(0))$.

V(0) = 23,22 à 10^{-2} près. V(7,8) = 117,86 à 10^{-2} près

$$\mu=\frac{117{,}86-23{,}22}{7{,}8}=\frac{94{,}64}{7{,}8}=12{,}1$$

<u>Conclusion</u>

La vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré savisse (15 ms^{-1}) est 12,1 ms^{-1} .