Exercice 1 — 7 points

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :
. E l'événement « la journée est ensoleillée » ;
. V l'événement Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

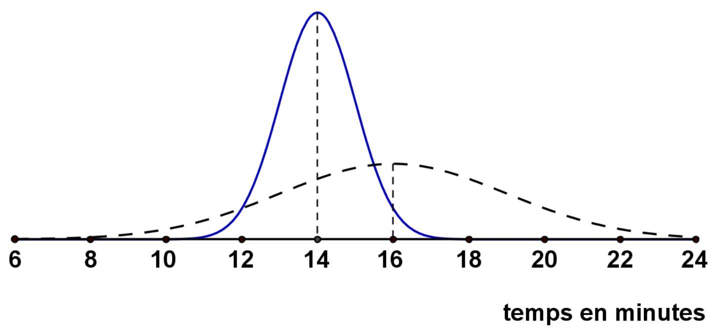
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est :
$P(V)=0{,}3\,p+0{,}6$.

3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.
3.a. Calculer la valeur de p.
3.b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est : $\frac{1}{3}$.

Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.
Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1. On nomme $\mathscr{C}_V$ et $\mathscr{C}_C$ ls courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figur ci-dessous.
Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C .



2. Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile- travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes.
Arrondir le résultat à 10^{-4} .

3. Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite entre moins de 15 minutes pour se rendre au travail.

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X, suivant une loi exponentielle de paramètre λ , réel positif.

1. Soit b un réel positif.
Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que :
$P(X\leqslant b)=1-e^{-\lambda b}$.

2. On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.
2.a. En déduire la valeur exacte de λ .
2.b. Calculer la propriété que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

CORRECTION

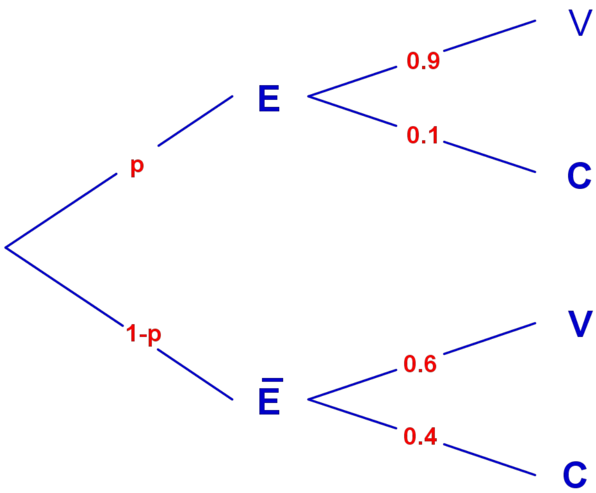
Partie A

1. La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane est notée p.
$P(E)=p$ et $P(\bar{E})=1-p$

. Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
$P_E(V)=\frac{9}{10}=0{,}9$ et $P_E(\bar{V})=P_E(C)=1-0{,}9=0{,}1$

. Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
$P_{\bar{E}}(V)=\frac{6}{10}=0{,}6$ et $P_{\bar{E}}(\bar{V})=P_{\bar{E}}(C)=1-0{,}6=0{,}4$.

. On obtient l'arbre pondéré :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
$P(V)=P(E)\times P_E(V)+P(\bar{E})\times P_{\bar{E}}(V)=p\times 0{,}9+(1-p)\times 0{,}6=0{,}9\,p+0{,}6-0{,}6\,p$
$P(V)=0{,}3p+0{,}6$.

3.a. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail donc $P(V)=0{,}675$.

$0{,}675=0{,}3p+0{,}6 \Leftrightarrow 0{,}3p=0{,}075 \Leftrightarrow p=\frac{0{,}075}{0{,}3}=$ **0,25.**

3.b. On nous demande de calculer : $P_V(E)$

$P_V(E)=\frac{P(V\cap E)}{P(V)}$

$P(V\cap E)=P(E)\times P_E(V)=0{,}25\times 0{,}9=0{,}225$

$P_V(E)=\frac{0{,}225}{0{,}675}=\frac{225}{675}=\frac{1}{3}$.

Partie B

1. Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

Le maximum de f est $f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Pour T_V , le maximum de la fonction de densité est obtenu pour $\mu_V=14$ (et $\sigma=1$).

Ce maximum est égal à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Pour T_C, le maximum de la fonction de densité est obtenu pour $\mu_C = 16$ (et $\sigma = 3$).

Ce maximum est égal à $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$.

2. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(10 \leqslant T_C \leqslant 15) =$ **0,8413 à** 10^{-4}

3. 0,8413= $P(10 \leqslant T_C \leqslant 15) \leqslant P(T_V \leqslant 15)$
$P(T_C \leqslant 15) \leqslant P(T_V \leqslant 16) = 0{,}5$
donc $P(T_C \leqslant 15) < P(T_V \leqslant 15)$
Romane doit privilégier le déplacement en vélo si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail.

Partie C

1. b est un réel positif.
$P(X \leqslant b) = \int_0^b f(t)\,dt = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.
Or, la fonction F, définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t) = -e^{-\lambda t}$, est une primitive de f.
$P(X \leqslant b) = F(b) - F(0) = -e^{\lambda b} + e^0 = 1 - e^{-\lambda b}$.

2.a. On a $P(X \leqslant 50) = 0{,}9$

Pour b = 50 $1 - e^{-50\lambda} = 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1 = e^{-50\lambda} \Leftrightarrow \ln(0{,}1) = -50\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0{,}1)}{50}$.

2.b. La loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.
Si b et c sont des nombres positifs alors $P_{(X \leqslant c)}(X \leqslant c+b) = P(X \leqslant b)$.
Pour c = 200 et b = 50
$P_{(X \leqslant 200)}(X \leqslant 200+50) = P(X \leqslant 50) =$ **0,9.**